Développements limités

F. Wlazinski

Licence d'économie

Dans tout ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}$ tout entier, x_0 est un élément de I, f est un élément de $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ i.e. f est une fonction numérique réelle dont l'ensemble de définition contient I, n est un entier naturel et P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg P \leq n\}$.

1 Equivalences

Remarque 1.1

Dire que x est dans un voisinage de ψ signifie :

(i) Si $\psi \in \mathbb{R}$ alors il existe un réel $\alpha > 0$ (le but est d'avoir α petit), tel que $x \in I \cap]\psi - \alpha; \psi + \alpha[$.

(ii) Si $\psi = +\infty$ alors il existe un réel A (le but est d'avoir A grand), tel que $x \in I \cap [A; +\infty[$.

(iii) Si $\psi = -\infty$ alors il existe un réel A, tel que $x \in I \cap] - \infty; A]$.

Définition 1.2

Soient f et g deux fonctions définies sur I.
On dit que f est négligeable devant g en ψ s'il existe une fonction ε telle que, pour tout x au voisinage de ψ, on ait $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to \psi} \varepsilon(x) = 0$.
On dit aussi que f est un petit ordre de g en ψ et on note $f = o(g)$.

Exemple 1.3

Propriété 1.4

Dans le cas où g ne s'annule pas sur un voisinage de ψ, alors $f = o(g)$ en ψ si et seulement si $\lim\limits_{x \to \psi} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Exemple 1.5

Remarque 1.6

Remarque 1.7

Soient α et β des réels strictement positifs.

- $x^\alpha = o\left((e^x)^\beta\right)$ en $+\infty$.
- $(\ln x)^\alpha = o\left(x^\beta\right)$ en $+\infty$.

Propriété 1.8

Si $f = o(g)$ et si $g = o(h)$ alors $f = o(h)$.

Remarque 1.9

On en déduit que $(\ln x)^\alpha = o\left((e^x)^\beta\right)$ en $+\infty$ pour tous les $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Propriété 1.10

Soient f_1, f_2, g_1 et g_2 des fonctions définies sur I.
Si $f_1 = o(g_1)$ et si $f_2 = o(g_2)$ alors $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$.

Remarque 1.11

Propriété 1.12

Si $f_1 = o(g)$ et si $f_2 = o(g)$, alors, pour tous λ, $\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f_1 + \mu f_2 = o(g)$.

Propriété 1.13

Soient f et g deux fonctions définies sur I et soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pour ψ fixé, on a :

(i) $\lim\limits_{x \to \psi} f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; f = o(1)$ (en ψ).

(ii) si $f = o(g)$ alors $\lambda.f = o(g)$ et $f = o(\lambda.g)$

(iii) si $f = o(g)$ alors $f^p = o(g^p)$ pour tout entier $p > 0$.

(iv) si $f = o(g)$ alors $\dfrac{1}{g} = o\left(\dfrac{1}{f}\right)$

(v) si $f = o(g)$ alors $|f| = o(|g|)$ (on a aussi la réciproque)

Définition 1.14

On dit que deux fonctions f et g (définies sur I) sont équivalentes en ψ et on note $f \underset{\psi}{\sim} g$, si on a $f - g = o(g)$ au voisinage de ψ, c'est-à-dire s'il existe une fonction $\varepsilon(x)$ telle que $f(x) = g(x) + \varepsilon(x)g(x)$ avec $\lim\limits_{x \to \psi} \varepsilon(x) = 0$.

Propriété 1.15

Dans le cas où g ne s'annule pas sur un voisinage de ψ, alors $f \underset{\psi}{\sim} g$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to \psi} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Exemples 1.16

Propriété 1.17

Une fonction polynômiale est équivalente en $+\infty$ et en $-\infty$ à son terme de plus haut degré.

Une fonction polynômiale est équivalente en 0 à son terme de plus petit degré.

Propriété 1.18

Les équivalents usuels sont :

$\ln(1+h) \underset{0}{\sim} h$	$\sin h \underset{0}{\sim} h$	$e^h - 1 \underset{0}{\sim} h$
$\tan h \underset{0}{\sim} h$	$\sqrt{1+h} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}h$	$1 - \cos h \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}h^2$

Remarque 1.19

Autrement dit, au voisinage de 0, on a :

$\ln(1+h) = h + o(h)$	$\sin h = h + o(h)$	$e^h = 1 + h + o(h)$
$\tan h = h + o(h)$	$\sqrt{1+h} = 1 + \frac{1}{2}h + o(h)$	$\cos h = 1 - \dfrac{1}{2}h^2 + o(h^2)$

Propriété 1.20

Si $h(x)$ est dans un voisinage de γ lorsque x est au voisinage de ψ, autrement dit, si $\lim\limits_{x\to\psi} h(x) = \gamma$ alors $f \underset{\gamma}{\sim} g \;\Rightarrow\; f\circ h \underset{\psi}{\sim} g\circ h$.

Exemples 1.21

Propriété 1.22

Si $f \underset{\psi}{\sim} g$ alors $\lim\limits_{x\to\psi} f(x) = \lim\limits_{x\to\psi} g(x)$.

Exemple 1.23

Remarque 1.24

En particulier, pour tout $\ell \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f \underset{\psi}{\sim} \ell$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to\psi} f(x) = \ell$.

Propriété 1.25

(i) Si $f_1 \underset{\psi}{\sim} g_1$ et si $f_2 \underset{\psi}{\sim} g_2$ alors $f_1 \times f_2 \underset{\psi}{\sim} g_1 \times g_2$.

(ii) Si $f_2 \underset{\psi}{\sim} g_2$ et si f_2 et g_2 ne s'annulent pas sur un voisinage de ψ alors $\dfrac{1}{f_2} \underset{\psi}{\sim} \dfrac{1}{g_2}$.

(iii) Si $f_1 \underset{\psi}{\sim} g_1$, si $f_2 \underset{\psi}{\sim} g_2$ et si f_2 et g_2 ne s'annulent pas sur un voisinage de ψ alors $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{\psi}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$.

Exemples 1.26

Remarque 1.27

Corollaire 1.28

Si f et g ne s'annulent pas sur un voisinage de ψ et si $f \underset{\psi}{\sim} g$ alors $f^p \underset{\psi}{\sim} g^p$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

Exemple 1.29

Corollaire 1.30

Si f et g sont strictement positives sur un voisinage de ψ et si $f \underset{\psi}{\sim} g$ alors $f^a \underset{\psi}{\sim} g^a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Exemple 1.31

Propriété 1.32

Si $f \underset{\psi}{\sim} g$ et si $g \underset{\psi}{\sim} h$ alors $f \underset{\psi}{\sim} h$.

Propriété 1.33

Si $f \underset{\psi}{\sim} g$, alors $|f| \underset{\psi}{\sim} |g|$.

Remarque 1.34

Exemple 1.35

Propriété 1.36

Si $f \underset{\psi}{\sim} g$, alors f et g sont du même signe au voisinage de ψ .

Propriété 1.37

Si $f \underset{\psi}{\sim} g$ et si $h = o(f)$, alors $h = o(g)$.

2 Formules de Taylor

Définition 2.1

On appelle factorielle d'un entier naturel $n \geq 2$ et on note $n\,!$, le produit de tous les entiers naturels non nuls inférieurs ou égaux à n.

Autrement dit, $n\,! = 1 \times 2 \times \ldots \times n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} i$.

Remarques 2.2

Exemples 2.3

Remarque 2.4

Théorème 2.5 **Formule de Taylor-Young**

On suppose que f est continuement dérivable n fois c'est-à-dire $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.
Alors il existe une fonction ε définie sur I telle que : $\forall x \in I$,
$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \dfrac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dfrac{(x - x_0)^3}{3!}f^{(3)}(x_0) + \cdots + \dfrac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + (x - x_0)^n\varepsilon(x - x_0)$ avec $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$
Si on remplace x par $x_0 + h$, on obtient : $\forall h \in \mathbb{R}$ / $x_0 + h \in I$,
$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \dfrac{h^2}{2!}f''(x_0) + \dfrac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_0) + \cdots + \dfrac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + h^n\varepsilon(h)$ avec $\displaystyle\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Exemples 2.6

Remarque 2.7

3 Développement limité en un point

Définition 3.1

Soit x_0 un réel.
On dit que f admet un *développement limité* (D.L.) d'ordre n en x_0 si et seulement siil existe un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\deg P \leq n$ et $f(x) = P(x - x_0) + o_{x_0}((x - x_0)^n)$ sur un voisinage de x_0.
P est appelé *partie principale* ou *partie régulière* du D.L. (de f en x_0 à l'ordre n).
$o_{x_0}((x - x_0)^n)$ signifie $(x - x_0)^n\varepsilon(x - x_0)$ avec $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$.
$o_{x_0}((x - x_0)^n)$ est appelé *reste* du D.L. (de f en x_0 à l'ordre n).

Remarque 3.2

Exemples 3.3

Remarque 3.4

Corollaire 3.5

f admet un développement limité d'ordre n en 0 si et seulement siil existe un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\deg P \leq n$ et $f(x) = P(x) + o(x^n)$ sur un voisinage de 0.

Exemple 3.6

Remarques 3.7

Propriété 3.8

Toute fonction continuement dérivable n fois sur un voisinage de x_0 admet un D.L. d'ordre n en x_0. Celui-ci est donné par exemple par la formule de Taylor-Young.

Exemples 3.9

Remarque 3.10

Propriété 3.11

f admet un D.L. d'ordre 0 en $x_0 \Leftrightarrow f$ est continue en x_0 ou peut être prolongée par continuité en x_0.
f admet un D.L. d'ordre 1 en $x_0 \Leftrightarrow f$ est dérivable en x_0.

Corollaire 3.12

Si f admet un D.L. d'ordre $n \geq 2$ en x_0 alors f est continue en x_0 et f est dérivable en x_0.

Remarque 3.13

Exemple 3.14

Propriété 3.15

Si f admet un D.L. en x_0 de partie principale P alors $f \underset{x_0}{\sim} P$.

Propriété 3.16

f admet admet un D.L. à l'ordre n en $x_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement sila fonction $f(x_0 + h)$ admet un D.L. en 0.

Exemple 3.17

Remarque 3.18

Les propriétés qui vont suivre sont donc données pour un D.L. en 0. Elles peuvent se généraliser à un D.L. en un point $x_0 \neq 0$ ou en $\pm\infty$.

Définition 3.19

Soit $q \leq p$ et soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \cdots + a_pX^p$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égale à n c'est-à-dire $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
On appelle polynôme tronqué de P à l'ordre q et on note $\mathrm{Tr}_q(P)$ le polynôme $a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \cdots + a_qX^q$.

Exemple 3.20

Remarque 3.21

Propriété 3.22

Si f admet un D.L. à l'ordre n en 0 de la forme $f(x) = P(x) + o(x^n)$ et si $s \leq n$, alors f admet un D.L. à l'ordre s en 0 de la forme $f(x) = \mathrm{Tr}_s(P)(x) + o(x^s)$.

Remarque 3.23

Exemple 3.24

4 Opérations sur les D.L.

Propriété 4.1

Soit λ un réel non nul. Si f admet un D.L. à l'ordre n en 0 de la forme $f(x) = P(x) + o(x^n)$ et si g admet un D.L. à l'ordre n en 0 de la forme $g(x) = Q(x) + o(x^n)$ alors :

- $f + g$ admet un D.L. à l'ordre n en 0 de la forme $(f + g)(x) = (P + Q)(x) + o(x^n)$.
- λf admet un D.L. à l'ordre n en 0 de la forme $(\lambda f)(x) = (\lambda P)(x) + o(x^n)$.
- $f \times g$ admet un D.L. à l'ordre n en 0 de la forme $(f \times g)(x) = \mathrm{Tr}_n(P \times Q)(x) + o(x^n)$.
- Si de plus $g(0) = 0$ alors $f \circ g$ admet un D.L. à l'ordre n en 0 de la forme $(f \circ g)(x) = \mathrm{Tr}_n(P \circ Q)(x) + o(x^n)$.
- En particulier, si R est un polynôme alors $R \circ g$ admet un D.L. à l'ordre n en 0 de la forme $(R \circ g)(x) = \mathrm{Tr}_n(R \circ Q)(x) + o(x^n)$.

Exemples 4.2

Remarque 4.3

Exemple 4.4

Propriété 4.5

Si f admet un D.L. à l'ordre n en 0 de la forme $f(x) = P(x) + o(x^n)$, si g admet un D.L. à l'ordre n en 0 de la forme $g(x) = Q(x) + o(x^n)$ et si $g(0) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ admet un D.L. à l'ordre n en 0 de la forme $\dfrac{f}{g}(x) = R(x) + o(x^n)$ où R est le quotient de la division suivant les puissances croissantes de P par Q à l'ordre n.

Exemple 4.6

5 Autres propriétés sur les D.L.

Propriété 5.1

Soit $q \in N^*$ $(q \geq 1)$.
Si f admet un D.L. en x_0 à l'ordre n de la forme :
$f(x) = a_q(x - x_0)^q + a_{q+1}(x - x_0)^{q+1} + a_{q+2}(x - x_0)^{q+2} + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}(x - x_0)^n)$
Alors la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{f(x)}{(x - x_0)^q}$ peut être prolongée par continuité en x_0.
De plus g admet un D.L. en x_0 à l'ordre $n - q$ qui est :
$g(x) = a_q + a_{q+1}(x - x_0) + a_{q+2}(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^{n-q} + o_{x_0}((x - x_0)^{n-q})$

Exemple 5.2

Propriété 5.3

Soit $f(x) = P(x) + o(x^n)$ le D.L. de la fonction f en 0 à l'ordre n. Alors :

- si f est une fonction paire alors tous les monômes de P sont de degré pair.
- si f est une fonction impaire alors tous les monômes de P sont de degré impair.

Propriété 5.4

Si f est une fonction continue sur I et si f admet un D.L. en x_0 à l'ordre n de partie principale P, alors toute fonction F primitive de f admet un D.L. en x_0 à l'ordre $n + 1$ dont la partie principale est la primitive de P telle $P(x_0) = F(x_0)$.

Exemples 5.5

Propriété 5.6
Si f est une fonction dérivable sur I, si f admet un D.L. en x_0 à l'ordre n de partie principale P, et si f' admet un D.L. en x_0 à l'ordre $n-1$ alors sa partie principale est P'.

Remarque 5.7

Exemple 5.8

6 D.L. en l'infini

Définition 6.1
On suppose que I est un voisinage de $\pm\infty$.
On dit que f admet un D.L. à l'ordre n en $+\infty$ ssi la fonction $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f}(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ admet un D.L. à l'ordre n en 0^+.
On suppose que I est un voisinage de $-\infty$.
On dit que f admet un D.L. à l'ordre n en $+\infty$ ssi la fonction $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f}(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ admet un D.L. à l'ordre n en 0^-.

Exemples 6.2