Dérivées, primitives et intégrales

F. Wlazinski

Licence d'économie

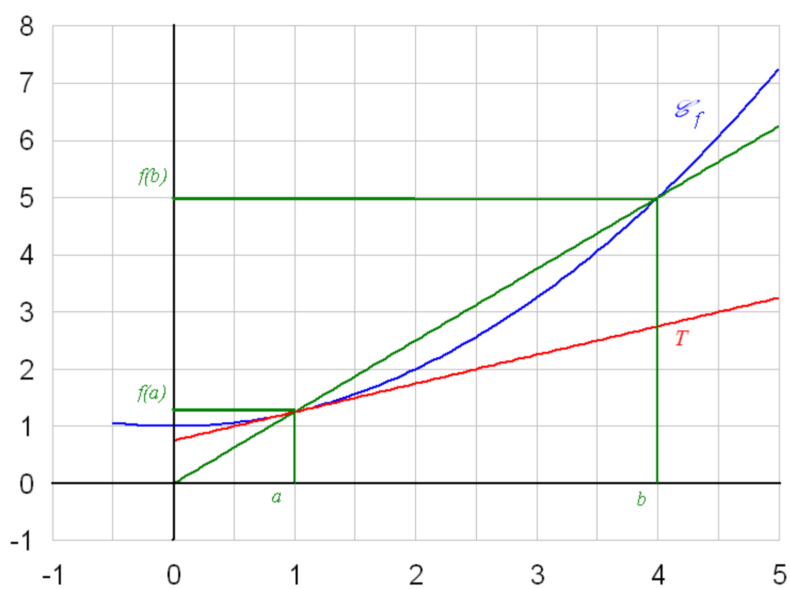
Dans tout ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}$ en entier.

1 Ensemble de dérivabilité et fonction dérivée

Dans tout cette partie, f est une fonction définie sur I et a et b sont deux élément de I avec $a < b$.

Définition 1.1

On appelle taux d'accroissement de la fonction f entre a et b le quotient $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



Remarque 1.2

Définition 1.3

On dit que f est dérivable en a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie.
Cette limite est alors appelée nombre dérivé de f en a et est notée $f'(a)$.

Exemples 1.4

Propriété 1.5

Si $f'(a)$ existe, l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en a est $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.

Exemple 1.6

Définition 1.7

On dit que f est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable en tout point de I.

Définition 1.8

Si f est dérivable sur I, l'application qui, à tout x de I, associe son nombre dérivé $f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f et est notée f'.

Exemples 1.9

Remarque 1.10

Il faut connaître les dérivées usuelles. En voici quelques unes :

Fonction f	**Domaine de dérivabilité de f**	**fonction dérivée**
a où $a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
x^n où $n \in \mathbb{Z}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$

Remarque 1.11

L'ensemble des fonctions dérivables sur I dont la dérivée est continue est noté $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.

Propriété 1.12

Si f est dérivable en a alors f est continue en a.
Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

Remarque 1.13

Propriété 1.14

Si f et g sont dérivables sur I, alors $f + g$ est dérivable sur I et $(f + g)' = f' + g'$.

Exemple 1.15

Propriété 1.16

Si f et g sont dérivables sur I, alors $f \times g$ est dérivable sur I et $(f \times g)' = f' \times g + g' \times f$.

Exemple 1.17

Remarque 1.18

En particulier, avec les hypothèses de la propriété, si $g = \text{cste} = \lambda$, alors $(\lambda f)' = \lambda f'$.

Exemple 1.19

Propriété 1.20

Si f est dérivable sur I et si f ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{f}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$.

Exemple 1.21

Corollaire 1.22

Si f et g sont dérivables sur I et si g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$.

Exemple 1.23

Propriété 1.24

Si f est dérivable sur I et si g est dérivable sur $f(I)$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$.

Remarque 1.25

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}$ tout entier et si u est une fonction dérivable sur I et dont la dérivée est notée u', il faut connaître quelques formes usuelles dont en voici quelques unes :

Fonction	Fonction dérivée
u^α où $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha u' u^{\alpha-1}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\cos u$	$-u' \sin u$

Exemple 1.26

Définition 1.27

On définit par récurrence la dérivée n-ième d'une fonction par $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.
On a aussi $f^{(0)} = f$ et $f^{(1)} = f'$.
On note souvent $f^{(2)} = f''$ et parfois $f^{(n)} = \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$.

Remarque 1.28

L'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I dont la dérivée n-ième est continue sur I est noté $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.
En particulier, $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions infiniment dérivables sur I.

2 Primitives

Définition 2.1

Soit f une fonction définie sur I.
Une fonction F est une *primitive* de f sur I si F est dérivable sur I et $F' = f$.

Exemple 2.2

Remarques 2.3

Notation

On écrit $F = \int f(t)\,\mathrm{d}t$ pour exprimer que f est une primitive de f.

Propriété 2.4

Si f est une fonction continue sur I alors f possède des primitives sur I.

Remarque 2.5

A fortiori, si f est une fonction dérivable sur I alors f possède des primitives sur I.

Propriété 2.6

Soient F_1 et F_2 deux primitives d'une fonction f sur I. Alors $F_1 - F_2$ est une fonction constante.

Remarque 2.7

Autrement dit, si F_1 et F_2 sont deux primitives de f sur I alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $F_2 = F_1 + c$.
Cette constante c est appelée *constante d'intégration.*
Cela signifie que si l'on connaît une primitive de f alors on connaît toutes les primitives de f.

Exemple 2.8

Remarques 2.9

Propriété 2.10

Soit f une fonction dérivable sur I. Soient $a \in I$ et $b \in \mathbb{R}$.
Alors il existe une *unique* primitive F de f sur I vérifiant $F(a) = b$.

Exemple 2.11

Remarque 2.12

Rappel : C'est ainsi que l'on définit la fonction *logarithme népérien.*
En effet, la fonction ln est la primitive de la fonction (dite fonction inverse) $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ et qui vérifie $\ln 1 = 0$.
Autrement dit, $\forall x \in]0; +\infty[$, on a $(\ln)'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Propriété 2.13

Si F est une primitive d'une fonction f (sur I) et si u' est une dérivée d'une fonction u (sur J avec $u(J) \subset I$) alors $F(u)$ est une primitive de $u' \times f(u)$ (sur I).

Remarques 2.14

3 Intégration sur un segment

Définition 3.1

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $[a; b]$ et soit F une primitive de f sur $[a; b]$. On appelle *intégrale* de f de a à b, le nombre réel $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemples 3.2

Remarques 3.3

- Le résultat de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas de la primitive choisie. En effet, si G est une autre primitive de f, alors il existe un réel k tel que $G = F + k$ et donc $G(b) - G(a) = F(b) + k - (F(a) - k) = F(b) - F(a)$.
- $\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$
- $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Définition 3.4

On dit qu'une fonction $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ est continue *par morceaux* sur $[a; b]$ si f est continue en tout point de $[a; b]$ sauf en un nombre fini de points. De plus, il faut qu'en ces points f admette une limite finie à gauche et à droite.

Exemple 3.5

Remarque 3.6

Une fonction continue est continue par morceaux.

Définition 3.7

Soient $a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$ des réels.
Soit f une fonction continue (ou prolongeable par continuité) sur chacun des intervalles $[x_i; x_{i+1}]$.
Alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple 3.8

4 Propriétés de l'intégrale

Dans toute cette partie, a et b sont deux réels tels que $a < b$ et f, g sont deux fonctions continues par morceaux sur l'intervalle $[a; b]$

Théorème 4.1

Pour tout réel c de l'intervalle $[a, b]$, on a $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Propriété 4.2

Soient λ et μ deux réels.

Alors $\lambda f + \mu g$ est continue par morceaux sur $[a; b]$ et $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Propriété 4.3

Si, $\forall t \in [a; b]$, on a $f(t) \geq 0$ (on dit que f est positive sur $[a; b]$), alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$.

Corollaire 4.4

Si $\forall t \in [a; b]$ $f(t) \leq g(t)$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Corollaire 4.5

$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$

Propriété 4.6

Si f est continue et positive et si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ alors $f(t) = 0$ $\forall t \in [a;b]$ (on dit que f est nulle sur $[a;b]$).

5 Techniques de calcul

Propriété 5.1

Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$.
On dit que l'on a fait une *intégration par partie*.

Exemples 5.2

Propriété 5.3

Soit f une fonction intégrable sur $[a;b]$ et φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$ avec $\varphi([\alpha,\beta]) \subset [a;b]$.
Alors on a : $\displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta \varphi'(t) \times f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t$
On dit que l'on a fait un *changement de variable*.

Exemples 5.4