Droites et systèmes

F. Wlazinski

Licence d'économie

Dans tout ce chapitre, nous travaillerons dans le plan euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1 Droites

1.1 Equations cartésiennes de droites dans le plan

1.1.1 Forme générale

Définition 1.1

On appelle *équation cartésienne* d'une droite $\mathcal{D}$ toute équation faisant intervenir x et/ou y telle que tout point $M(x_M, y_M)$ du plan appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement x_M et y_M sont solutions de l'équation.

Propriété 1.2

Toute droite du plan admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ où a, b, $c \in \mathbb{R}$.

Notation

Lorsque l'on écrit $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$, le deux-points (qu'il ne faut surtout jamais oublier d'écrire et qui N'EST PAS le signe =) signifie "d'équation" et se lit ainsi.

Propriété 1.3

Lorsque $b = 0$ alors nécessairement $a \neq 0$ et on obtient une équation cartésienne de la forme $x = k$ $\left(= \frac{-c}{a}\right)$ qui est celle d'une droite du plan parallèle à l'axe des ordonnées.
Lorsque $a = 0$ alors nécessairement $b \neq 0$ et on obtient une équation cartésienne de la forme $y = k'$ $\left(= \frac{-c}{b}\right)$ qui est celle d'une droite du plan parallèle à l'axe des abscisses.

Définition 1.4

On appelle *vecteur directeur* d'une droite tout vecteur dont la droite possède la même direction.

Propriété 1.5

Le vecteur $\vec{v}(-b; a)$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$.

Remarque 1.6

- Il n'y a pas unicité du vecteur directeur.
- Deux droites parallèles ont des vecteurs directeurs colinéaires.
- Deux droites perpendiculaires ont des vecteurs directeurs orthogonaux.

Propriété 1.7

Le vecteur $\vec{u}(a; b)$ est un vecteur orthogonal à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$.

1.1.2 Equations réduites

Propriété 1.8

Toute droite $\mathcal{D}$ du plan non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation dite *équation réduite* de la forme $y = mx + p$, où m et p sont deux nombres réels. Une telle écriture est unique pour $\mathcal{D}$.

Définition 1.9

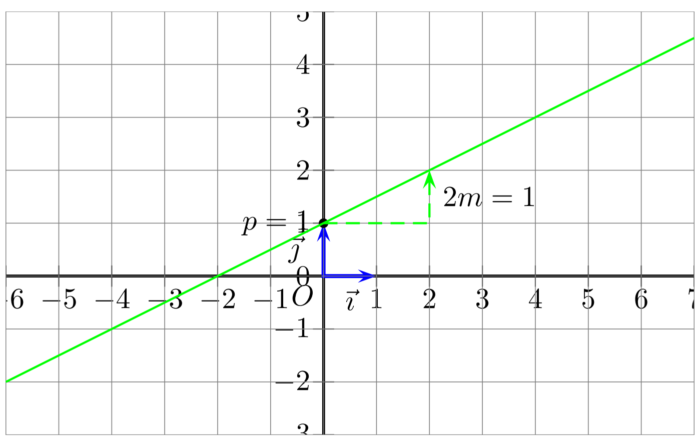
Avec les notations de la propriété précédente, le réel p est appelé *ordonnée à l'origine* de $\mathcal{D}$.
Le nombre réel m est appelé *coefficient directeur* ou *pente* de la droite $\mathcal{D}$.

Remarques 1.10

- Puisque p est la valeur obtenue par y quand $x = 0$, le point de coordonnées $(0, p)$ (qui est sur l'axe des ordonnées) appartient à la droite.
- Une augmentation de 1 dans les abscisses entraine soit une augmentation ou une diminution de $|m|$ dans les ordonnées.

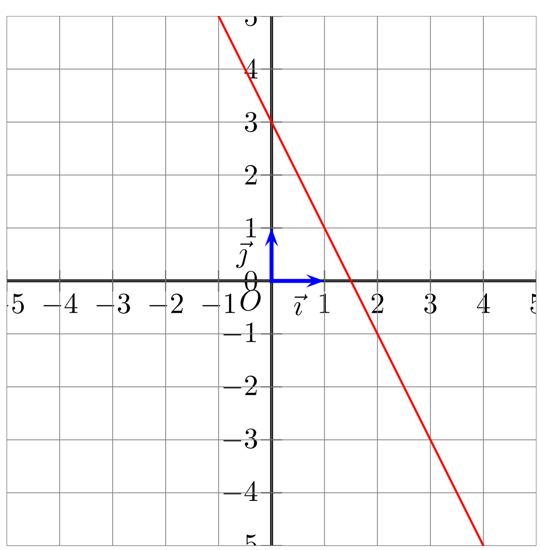
Exemple 1.11

Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $-x + 2y - 2 = 0$ et on cherche l'équation réduite de $\mathcal{D}$.
De $-x + 2y - 2 = 0$, on tire $2y = x + 2$ et donc $y = \dfrac{1}{2}x + 1$.



Exemple 1.12

Déterminer graphiquement l'équation de la droite du représentée ci-dessous :

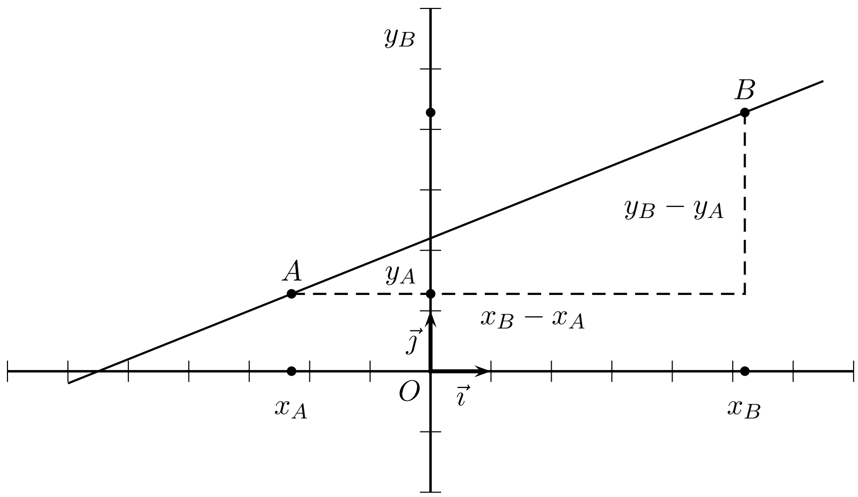


L'ordonnée à l'origine est de 3 donc $p = 3$.
Si on avance d'une unité en abscisse, alors pour rejoindre la droite on doit descendre de deux unités donc $m = -2$.
L'équation de la droite est donc $y = -2x + 3$.

Propriété 1.13

Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points différents d'une même droite $\mathcal{D} : y = mx + p$ qui n'est pas parallèle à $(0y)$, alors $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Remarque 1.14



$$m = \frac{\textit{variation verticale}}{\textit{variation horizontale}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Exemple 1.15

Déterminer l'équation réduite de la droite $\mathcal{D}$ passant par les points $A(4; -2)$ et $B(1; 4)$.
Puisque $x_A \neq x_B$ donc la droite $\mathcal{D}$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées et possède donc bien une équation réduite de la forme $y = mx + p$.
En premier lieu, on détermine m avec la formule $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{4+2}{1-4} = -2$
Ensuite, on détermine p en remplaçant les coordonnées de A ou B dans l'équation réduite.
On a donc $y_A = mx_A + p \iff -2 = -2 \times 4 + p \iff p = 6$
la droite $\mathcal{D}$ a pour équation réduite $y = -2x + 6$.

Propriété 1.16

Soient deux droites $\mathcal{D} : y = mx + p$ et $\mathcal{D}' : y = m'x + p'$. On a :
$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ parallèles $\iff m = m'$.
$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ perpendiculaires $\iff mm' = -1$.

1.2 Droite et demi-plans

Propriété 1.17

Soient a et b deux réels non simultanément nuls.

(i) Les points $M(x, y)$ tels que $ax + by + c = 0$ sont les points d'une droite $\mathcal{D}$.

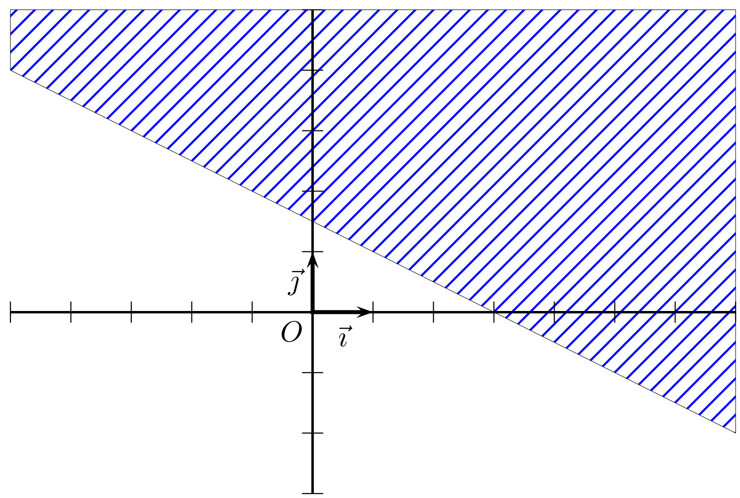
(ii) Les points $M(x, y)$ tels que $ax + by + c > 0$ sont exactement les points de l'un des deux demi-plans délimités par $\mathcal{D}$.

Remarque 1.18

Comme conséquence, on obtient que les points $M(x, y)$ tels que $ax + by + c < 0$ sont exactement les points de l'autre demi-plan délimités par $\mathcal{D}$.

Exemple 1.19

On cherche à résoudre $-x - 2y + 3 < 0$.
Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $-x - 2y + 3 = 0$ dont l'équation réduite est $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$.
En remplaçant les coordonnées de $O(0; 0)$ dans $-x - 2y + 3$, on obtient 3 qui est > 0. Cela signifie que le point O ne fait pas parti du demi-plan délimité par $\mathcal{D}$ qui est solution.
L'ensemble de solution est la partie du plan hachurée en bleu ci-dessous.



1.3 Intersection de deux droites

Propriété 1.20

Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$.
Un point $M(x_M; y_M)$ est à l'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ si et seulement si ses coordonnées vérifient simultanément les équations de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, autrement dit si et seulement si $(x_M; y_M)$ est un couple de solution du système $\left\{\begin{array}{lcl} ax + by + c & = & 0 \\ a'x + b'y + c' & = & 0 \end{array}\right.$.

Remarques 1.21

- Quand le système n'a pas de solution, cela signifie que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles.
- Quand le système a une infinité de solutions, cela signifie que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont confondues.

2 Systèmes d'équations

2.1 Préliminaires

Définitions 2.1

Un système d'équations est simplement un ensemble d'équations.
On appelle domaine de définition ou de validité d'un système d'équations, l'intersection des domaines de définitions de toutes les équations.
Résoudre un système, c'est trouver, pour les inconnues constituant le système, toutes les valeurs possibles qui sont simultanément solutions de toutes les équations du système. L'ensemble de toutes ces valeurs est appelé ensemble de solution du système.
Deux systèmes d'équations sont dits équivalents s'ils ont même ensemble de solution.

Notation

On note généralement un système d'équations sous la forme d'équations les unes en dessous des autres et rassemblées par une accolade.

Un système s'écrit donc $\left\{\begin{array}{c} E_1(x_1;x_2;...;x_p) \\ E_2(x_1;x_2;...;x_p) \\ \vdots \\ E_n(x_1;x_2;...;x_p) \end{array}\right.$ avec $n \geq 2$ et où $x_1, x_2, ..., x_p$ sont les p (≥ 1) inconnues du système et $E_i(x_1;x_2;...;x_p)$ est une équation de ces inconnues pour tout i variant de 1 à n.

Remarque 2.2

On peut donc considérer que le sigle de l'accolade correspond à un "et" logique entre toutes les équations.

2.2 Méthode dite par substitution

Définition 2.3

On appelle équation substituante d'une équation E en une inconnue x_j toute équation obtenue à partir de E dans laquelle x_j s'écrit en fonction des autres variables de E.

Propriété 2.4

Sur son domaine de validité, le système obtenu en gardant une équation substituante en x_j et en remplaçant x_j dans toutes les autres équations par son expression en fonction des autres variables est équivalent au système initial.

Remarque 2.5

Cette méthode est utilisable quel que soit le type de système d'équations.

Exemples 2.6

- $\left\{\begin{array}{r} x^2-y^2-z^2=-12 \\ x+y+z=6 \\ yz=6 \end{array}\right.$ (on peut remarquer que y et z jouent le même rôle)

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} (6-y-z)^2-y^2-z^2=-12 \\ x=6-y-z \\ yz=6 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 36-12y-12z+y^2+z^2+2yz-y^2-z^2=-12 \\ x=6-y-z \\ yz=6 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y+z=5 \\ x=6-y-z \\ yz=6 \end{array}\right.$

On obtient $x=1$ et y et z sont les racines du polynôme X^2-5X+6 soit $S=\{(1,2,3);(1,3,2)\}$.

- $\left\{\begin{array}{c} 2x+3y=9 \\ x+y=2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2\,(2-y)+3y=9 \\ x=2-y \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y=5 \\ x=-3 \end{array}\right.$

Et donc $S=\{(-3,5)\}$.

2.3 Systèmes d'équations linéaires

Définition 2.7

On appelle système d'équations linéaires un système du type : (1) $\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{np}x_p = b_n \end{array}\right.$
où les $(a_{ij})_{i=1,nj=1,p}$ et les $(b_j)_{j=1,n}$ sont des éléments d'un corps K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour nous) et les $(x_i)_{i=1,p}$ des inconnues.

Propriété 2.8

Soient $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.
Le système (1) correspond à l'équation matricielle $AX = B$.

2.4 Méthode par inversion de matrice

Cette méthode sera vue plus tard mais en voici la propriété principale :

Propriété 2.9

Le système (1) possède une unique solution si $n = p$ et A est inversible. On dit alors que c'est un système de Cramer. Dans ce cas, l'équation $AX = B$ est alors équivalente à $X = A^{-1} \times B$.

2.5 Méthode de Cramer

Cette méthode sera vue plus tard pour un système à 3 variables. Mais nous allons l'utiliser dès maintenant pour les systèmes de Cramer à 2 variables.

Propriété 2.10

Soit A_k la matrice obtenue en remplaçant la k-ième colonne de la matrice A du système (1) par B. Si le système (1) est un système de Cramer, on obtient sa solution en calculant pour tout $i = 1, p$, $\dfrac{\det A_i}{\det A}$ qui est la valeur solution de x_i.

Remarque 2.11

En terme de calculs, la méthode n'est guère efficace à partir de quatre équations. Néanmoins, elle a l'avantage de fournir explicitement une solution et s'applique dans des systèmes où les coefficients dépendent d'un ou plusieurs paramètres.

Définition 2.12

Pour tous scalaires a, b, c et d on appelle *déterminant* de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et on note $\det(M)$ le réel $\det(M) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Définition 2.13

Soit (S) le système linéaire : $\left\{\begin{array}{rcl} ax + by & = & c \\ dx + ey & = & f \end{array}\right.$

On appelle déteminant de (S) et on note $\det(S)$ le réel $\det(S) = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - bd$.

De plus, on note $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix} = ce - bf$ et $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = af - cd$.

Propriété 2.14

Avec les notations de la définition précédente, (S) admet un unique couple solution si et seulement si $\det(S) \neq 0$ et, dans ce cas, on a : $x = \dfrac{D_x}{\det(S)}$ et $y = \dfrac{D_y}{\det(S)}$.

Exemple 2.15

Résoudre le système (S) : $\begin{cases} 3x + 2y &= -5 \\ 2x + y &= -1 \end{cases}$.

$\det(S) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 1 - 2 \times 2 = -1 \neq 0.$

On a donc $x = \dfrac{\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(S)} = \dfrac{-5 \times 1 - (-1) \times 2}{-1} = \dfrac{-3}{-1} = 3$

et $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\det(S)} = \dfrac{3 \times (-1) - 2 \times (-5)}{-1} = \dfrac{7}{-1} = -7.$

2.6 Opérations élémentaires

Définition 2.16

On appelle opération élémentaire sur les n lignes L_1, L_2, ... , L_n d'un système linéaire (S) l'une des opérations suivantes :
- échanger la $i$ème ligne avec la $j$ème qui est noté $L_i \leftrightarrow L_j$
- multiplier la $i$ème ligne par un scalaire a non nul qui est noté $L_i \leftarrow aL_i$
- ajouter k fois la $j$ème ligne à la $i$ème ligne qui est noté $L_i \leftarrow L_i + kL_j$

Remarque 2.17

On peut, en particulier, remplacer la $i$ème ligne par la somme d'un multiple non nul d'elle-même et d'un multiple de la $j$ème ligne : $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$.

Propriété 2.18

Tout système obtenu en effectuant des opérations élémentaires (sur les lignes) sur un système linéaire est équivalent à ce dernier.

2.7 Méthode de Gauss

Elle correspond à la méthode dite "par combinaisons".

Soit le système : $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$

qui correspond à une équation matricielle $AX = B$.

Si tous les a_{i1} sont nuls, alors x_1 n'intervient pas et on passe à la deuxième colonne. Si l'un des a_{i1} est non nul, en échangeant les lignes, on peut supposer qu'il s'agit de a_{11}, on remplace alors toutes les lignes L_i par $a_{11}L_i - a_{i1}L_1$ pour $2 \leq i \leq n$. Cela a pour effet de "supprimer" la variable x_1 de toutes les équations sauf la première. En pratique, s'il existe plusieurs coefficients a_{i1} $(1 \leq i \leq n)$ non nuls, on échange les lignes de façon à mettre en première ligne celle du coefficient le plus "simple".

On obtient donc un nouveau système équivalent : $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = b_1 \\ a'_{22}x_2 + ... + a'_{2p}x_p = b'_2 \\ \vdots \\ a'_{n2}x_2 + ... + a_{np}x'_p = b'_n \end{cases}$

On s'intéresse maintenant aux $(n-1)$ dernières lignes comme précédemment. On considère ces lignes comme si elles étaient indépendantes.

Si tous les a_{i2} pour $i \geq 2$ sont nuls, alors x_2 n'intervient pas et on passe à la colonne suivante. Si l'un des a_{i2} est non nul, en échangeant les lignes, on peut supposer qu'il s'agit de a_{22}, on remplace alors toutes les lignes L_i par $a_{22}L_i - a_{i2}L_2$ pour $3 \leq i \leq n$. La première équation n'a pas été modifiée et cela a pour effet de "supprimer" la variable x_2 de toutes les équations sauf la deuxième et (si $a_{12} \neq 0$) la première.

On réitère ces opérations jusqu'à ce que l'on obtienne un système dit triangulaire.

Suivant les valeurs de p de n et du rang de la matrice A, on obtient différent résultats.

Par exemple, si $n = p$ et si $rg(A) = p$, on obtient un système de la forme :

$$\left\{\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1p-1}x_{p-1} + a_{1p}x_p = c_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2p-1}x_{p-1} + a_{2p}x_p = c_2 \\ a_{33}x_3 + ... + a_{3p-1}x_{p-1} + a_{3p}x_p = c_3 \\ \vdots \\ a_{p-1p-1}x_{p-1} + a_{p-1p}x_p = c_{p-1} \\ a_{pp}x_p = c_p \end{array}\right.$$

Si les a_{ii} sont tous non nuls (en particulier a_{pp}), ce dernier système admet une unique solution que l'on obtient en remplaçant de façon récursive les différentes valeurs des x_i pour i de p à 1.

Exemples 2.19

- $$\left\{\begin{array}{rcll} 2x + y - z & = & 1 & \\ x + 3y + z & = & 3 & L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ 4x + 7y + z & = & 7 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x + y - z & = & 1 \\ 5y + 3z & = & 5 \\ 5y + 3z & = & 5 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x + y - z & = & 1 \\ y & = & -\frac{3}{5}z + 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x - \frac{3}{5}z + 1 - z & = & 1 \\ y & = & -\frac{3}{5}z + 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{4}{5}z \\ y & = & -\frac{3}{5}z + 1 \end{array}\right.$$

$S = \left\{ \left(\frac{4}{5}z; -\frac{3}{5}z + 1; z\right) \text{ où } z \text{ est un réel quelconque} \right\}$.

- $$\left\{\begin{array}{r} 2x + y - z = 1 \\ x + 3y + z = 3 \\ 4x + 7y + z = -1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x + y - z & = & 1 \\ 5y + 3z & = & 5 \\ 5y + 3z & = & -3 \end{array}\right.$$

$S = \emptyset$