

# Fonctions logarithmes

F. Wlazinski

Licence d'économie

Dans tout ce chapitre,  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}$  en entier.

## 1 Préliminaires, définition et premières propriétés

La formule permettant de calculer l'indice de Theil fait intervenir une fonction logarithme.

Par exemple, si  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont les salaires mensuels des  $n$  employés d'une entreprise et si  $\bar{x}$  est le salaire mensuel moyen mensuel, alors  $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i}{\bar{x}} \times \ln \frac{x_i}{\bar{x}} \right)$ .

### Propriété 1.1

Il existe une unique fonction appelée *logarithme népérien* et notée  $\ln$  qui est la primitive de la fonction (dite fonction inverse)  $x \mapsto \frac{1}{x}$  sur  $]0; +\infty[$  et qui vérifie  $\ln 1 = 0$ .

### Remarque 1.2

### Rappel

Si  $u$  est dérivable sur  $I$  et si  $f$  est dérivable sur  $u(I)$ , alors  $f \circ u$  est dérivable sur  $I$  et  $(f \circ u)' = u' \times (f' \circ u)$ .

### Propriété 1.3

Soit  $u$  une fonction dérivable sur  $I$  telle que  $u(x) > 0$  pour tout  $x$  de  $I$ .

Alors la fonction  $\ln u$  est dérivable sur  $I$  et  $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ .

### Exemples 1.4

### Remarque 1.5

### Propriétés 1.6

Soient  $x, y \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ . On a :

(i)  $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$

(ii)  $\ln(x^2) = 2 \ln x$

(iii)  $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$

$$(iv) \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

$$(v) \ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$$

$$(vi) \ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$$

### Exemples 1.7

## 2 Etude de la fonction $\ln$

La fonction  $\ln$  est définie, continue et dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

De plus,  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ , on a  $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$ .

Ce qui signifie que la fonction  $\ln$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

De plus,  $(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$  : la fonction  $\ln$  est concave.

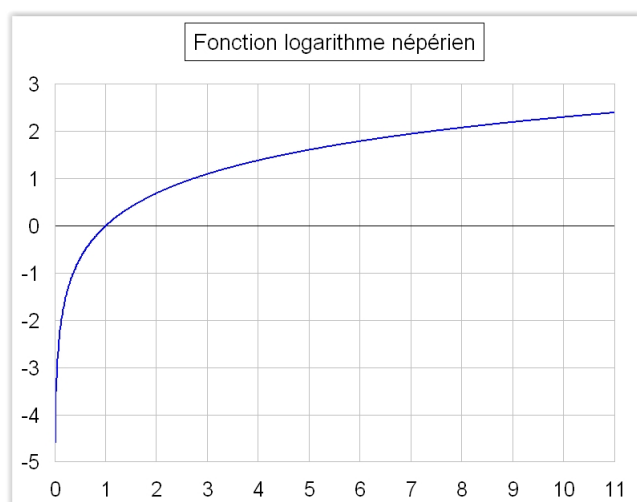
On admettra que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ .

La droite d'équation  $x = 0$  (c'est-à-dire l'axe des ordonnées) est asymptote à la courbe représentative de la fonction  $\ln$ .

On en déduit le tableau de variations :

| $x$       | 0         | $+\infty$ |
|-----------|-----------|-----------|
| $\ln'(x)$ |           | +         |
| $\ln(x)$  | $-\infty$ | $+\infty$ |

Et on obtient la courbe :



## 3 Equations et inéquations

### Propriété 3.1

La fonction  $\ln$  étant strictement croissante, continue et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , il existe un nombre réel unique noté  $e$  tel que  $\ln e = 1$ .

**Remarques 3.2**

- $e \approx 2,718$
- Pour tout réel  $\alpha$ , on a  $\ln(e^\alpha) = \alpha \ln e = \alpha$ .

**Exemple 3.3**

Puisque la fonction  $\ln$  est strictement croissante, on a les propriétés suivantes :

**Propriétés 3.4**

Soient  $a, b \in \mathbb{R}_+^*$  et  $c \in \mathbb{R}$ .

- (i)  $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
- (ii)  $\ln a \leq \ln b \Leftrightarrow a \leq b$
- (iii)  $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$
- (iv)  $\ln a = c \Leftrightarrow a = e^c$
- (v)  $\ln a \leq c \Leftrightarrow a \leq e^c$
- (vi)  $\ln a < c \Leftrightarrow a < e^c$

**Exemples 3.5****Remarque 3.6**

En particulier, on a  $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$ .

**Propriété 3.7**

Pout tout réel strictement positif  $\alpha$ , on a :

- (i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\alpha} = 1$
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$
- (iii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

**Exemples 3.8****4 Logarithme de base  $a$** **Définition 4.1**

On appelle *logarithme décimal* et on note  $\log$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$ .

**Propriétés 4.2**

Soient  $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On a :

- (i)  $\log 1 = 0$  et  $\log 10 = 1$
- (ii)  $\log(x^n) = n \log x$
- (iii)  $\log 10^\alpha = \alpha$ .

$$(iv) \log(x \times y) = \log x + \log y$$

$$(v) \log \frac{1}{x} = -\log x$$

$$(vi) \log \left( \frac{x}{y} \right) = \log x - \log y$$

$$(vii) \log \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log x$$

$$(viii) \log x = \log y \Leftrightarrow x = y$$

$$(ix) \log x \leq \log y \Leftrightarrow x \leq y$$

### Définition 4.3

Soit  $a$  un réel strictement positif et différent de 1. On appelle fonction *logarithme de base  $a$*  et on note  $\log_a$ , la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ .

### Propriétés 4.4

Soient  $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  et  $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ . On a :

$$(i) \log_a 1 = 0 \text{ et } \log_a a = 1$$

$$(ii) \log_a (x \times y) = \log_a x + \log_a y$$

$$(iii) \log_a x^n = n \log_a x.$$

$$(iv) \log_a \left( \frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

### Remarque 4.5

En particulier, on a  $\log_a a^x = x$ .

## 5 Exemples d'étude de fonctions