Optimisation des fonctions de deux variables

F. Wlazinski

Licence d'économie

1 $\mathbb{R}^2$ comme espace métrique

On identifie les couples (x, y) de $\mathbb{R}^2$ et les points dont les coordonnées sont (x, y) dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Définition 1.1

Soient $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$.
La *distance* de A à B, notée $d(A, B)$, est la distance euclidienne entre les points correspondants dans le plan euclidien c'est-à-dire $d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Remarques 1.2

Définition 1.3

Soit r un réel strictement positif et $A = (x_A, y_A)$ un élément de $\mathbb{R}^2$.
- On appelle *disque ouvert* de centre A et de rayon r et on note $\mathscr{B}_o(A, r)$ l'ensemble :
  $\mathscr{B}_o(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 / d(M, A) < r\}$.
- On appelle *disque fermé* de centre A et de rayon r et on note $\mathscr{B}_f(A, r)$ l'ensemble :
  $\mathscr{B}_f(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 / d(M, A) \leq r\}$.

Définition 1.4

Une partie F de $\mathbb{R}^2$ est dite *ouverte* si et seulement si, pour tout élément $M \in F$, il existe $r > 0$ tel que $\mathscr{B}_o(M, r) \subset F$.

Remarque 1.5

Définition 1.6

Une partie F de $\mathbb{R}^2$ est dite *fermée* si et seulement si son complémentaire $\overline{F}$ est une partie ouverte.

Remarques 1.7

Définition 1.8

Une partie Ω de $\mathbb{R}^2$ est dite *bornée* s'il existe un réel $R > 0$ tel que pour tout $M \in \Omega$, $d(M, O) \leq R$ où O est le point $(0, 0)$. Autrement dit, Ω est inclus dans un disque fermé de centre O et de rayon R.

Remarque 1.9

2 Fonctions numériques de deux variables

Définition 2.1

On appelle fonction *numérique de deux variables* toute fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Exemple 2.2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ (x, y) \mapsto \dfrac{x^2 + y^2}{x + y}$.

Définition 2.3

Soit f une fonction numérique de deux variables. On appelle *ensemble de définition* de f et on note D_f l'ensemble des couples (x, y) pour lesquels on peut effectivement calculer $f(x, y)$.

Exemple 2.4

On reprend l'exemple 2.2 c'est-à-dire la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x + y}$.

Définition 2.5

Soit f une fonction numérique définie sur une partie U ouverte de $\mathbb{R}^2$ et $A = (x_0, y_0) \in U$.
On dit que f tend vers le réel ℓ lorsque (x, y) tend vers (x_0, y_0) si et seulement si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $r > 0$, tel que pour tout point $M(x, y) \in \mathscr{B}_o(A, r)$, on ait $|f(x, y) - \ell| \leq \varepsilon$.
On note $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \ell$.

Remarque 2.6

Exemple 2.7

On reprend l'exemple 2.2 c'est-à-dire la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x + y}$.

Propriété 2.8

Soient f et g deux fonctions numériques définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et soit $(x_0, y_0) \in U$.
On suppose que f a pour limite ℓ en (x_0, y_0) et que g a pour limite ℓ' en (x_0, y_0). Alors :

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \lambda f(x, y) = \lambda \ell$

(ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) + g(x, y) = \ell + \ell'$

(iii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) \times g(x, y) = \ell \times \ell'$

(iv) Si $\ell' \neq 0$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{\ell}{\ell'}$

Définition 2.9

Soit f une fonction numérique définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et soit $(x_0, y_0) \in U$.

- On dit que f est *continue* en (x_0, y_0) si et seulement si $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.
- On dit que f est *continue* sur U si et seulement si f est continue en tout point de U.

Exemple 2.10

Propriété 2.11

Soient f et g deux fonctions numériques continues en un point (x_0, y_0) et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Alors λf, $f + g$, $f \times g$ et, si $g(x_0, y_0) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ sont continues en (x_0, y_0).

Propriété 2.12

Soit f une fonction numérique continue sur une partie U de $\mathbb{R}^2$ et g une fonction continue sur une partie I de $\mathbb{R}$ telle que $f(U) \subset I$. Alors $g \circ f$ est continue sur U.

Exemples 2.13

Remarques 2.14

Propriété 2.15

Soit f une fonction numérique de deux variables continue en (x_0, y_0).
Alors la fonction $f_x : t \mapsto f(t, y_0)$ est continue en x_0 et la fonction $f_y : t \mapsto f(x_0, t)$ est continue en y_0.

Remarque 2.16

Propriété 2.17

Si f est une fonction numérique continue sur une partie F fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$, alors f admet un maximum et un minimum.

3 Dérivées partielles

Dans toute cette partie les fonctions considérées seront définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et (x_0, y_0) désigne un point de U.
Si f est une fonction numérique définie sur U on notera $f_x : t \mapsto f(t, y)$ et $f_y : t \mapsto f(x, t)$ les applications partielles.

3.1 Dérivées partielles d'ordre 1

Définition 3.1

- On dit que f admet une *dérivée partielle d'ordre* 1 *par rapport à* x en (x_0, y_0) si et seulement si la fonction $f_x : t \mapsto f(t, y_0)$ est dérivable en x_0.
  La valeur de la dérivée en ce point est alors notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ou $f'_x(x_0, y_0)$.
- On dit que f admet une *dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à* y en (x_0, y_0) si et seulement si la fonction $f_y : t \mapsto f(x_0, t)$ est dérivable en y_0.
  La valeur de la dérivée en ce point est alors notée $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ ou $f'_y(x_0, y_0)$.
- On dit que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x (resp. y) sur U si f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x (resp. y) en tout point (x, y) de U.
  Les fonctions dérivées sont alors notées $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ou f'_x et f'_y.

Rappel

Définition 3.2

Si les applications $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur U, on dit que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$.

Remarque 3.3

Exemples 3.4

3.2 Dérivées partielles d'ordre 2

Définition 3.5

Si une fonction numérique f admet deux dérivées partielles d'ordre 1 notée f'_x et f'_y et si ces deux fonctions de deux variables admettent elles-mêmes des dérivées partielles d'ordre 1, on appelle celles-ci des dérivées partielles d'ordre 2 de f.

On note $\begin{array}{ll} f''_{x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) & f''_{y^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \\ f''_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) & f''_{yx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) \end{array}$.

Exemple 3.6

Définition 3.7

Si f est une fonction numérique de classe $\mathscr{C}^1$ et si ses dérivées partielles f'_x et f'_y sont aussi de classe $\mathscr{C}^1$, alors on dit que f *est de classe* $\mathscr{C}^2$ *sur* U.

Propriété 3.8

Si f est une fonction numérique de classe $\mathscr{C}^2$ alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Propriété 3.9

Soit f une fonction numérique de classe $\mathscr{C}^2$ sur U et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
La formule de Taylor à l'ordre 2 nous permet d'affirmer qu'il existe un voisinage de (x_0, y_0) et une fonction ε définie sur ce voisinage tels qu'en tout point (x, y) du voisinage, on ait :
$f(x,y) = f(x_0,y_0) + (x-x_0)f'_x(x_0,y_0) + (y-y_0)f'_y(x_0,y_0) + \dfrac{(x-x_0)^2}{2} f''_{x^2}(x_0,y_0) + (x-x_0)(y-y_0)f''_{xy}(x_0,y_0) + \dfrac{(y-y_0)^2}{2} f''_{y^2}(x_0,y_0) + \left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right)\varepsilon(x,y)$ avec $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varepsilon(x,y) = 0$.

Exemple 3.10

Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 + 4x + 3y^2 - 6xy$ une fonction numérique de deux variables.
On cherche un développement de Taylor d'ordre 2 de f aux points $A = (1; 1)$ et $B = (1; 0)$.

Remarque 3.11

Si on pose $x = x_0 + h$ si $y = y_0 + h$, et si on suppose que $o(||(h,k)||^2)$ signifie $\left(h^2 + k^2\right)\varepsilon(h,k)$ avec $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$, la formule de Taylor à l'ordre 2 devient :
$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + hf'_x(x_0,y_0) + kf'_y(x_0,y_0) + \dfrac{h^2}{2} f''_{x^2}(x_0,y_0) + hkf''_{xy}(x_0,y_0) + \dfrac{k^2}{2} f''_{y^2}(x_0,y_0) + o(||(h,k)||^2)$.

Exemple 3.12

4 Fonctions homogènes

Définition 4.1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction numérique de 2 variables. On dit que f est homogène de degré $k \in \mathbb{N}^*$ si pour tout $M = (x, y)$ de D_f et pour tout réel λ tel que $(\lambda x, \lambda y) \in D_f$, on a $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y)$.

Exemple 4.2

Propriété 4.3

Soit f une fonction numérique de 2 variables de classe $\mathscr{C}^1$. homogène de degré $k \in \mathbb{N}^*$.
Alors, pour tout $M = (x, y)$ de D_f, on a $k.f(x, y) = x.f'_x(x, y) + y.f'_y(x, y)$.

Remarque 4.4

Cette propriété est appelée *l'identité d'Euler*.

Exemple 4.5

5 Extremum local

Définition 5.1

Soit f une fonction numérique de deux variables définie sur U.
- On dit que f admet un *minimum local* en (x_0, y_0) s'il existe un réel $r > 0$ tel que $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ pour tout $(x, y) \in \mathscr{B}_o((x_0, y_0), r) \cap U$.
- On dit que f admet un *maximum local* en (x_0, y_0) s'il existe un réel $r > 0$ tel que $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ pour tout $(x, y) \in \mathscr{B}_o((x_0, y_0), r) \cap U$.
- On dit que f admet un *extremum local* en (x_0, y_0) lorsque f admet soit un minimum soit un maximum local en ce point.

Remarque 5.2

Définition 5.3

Soit f une fonction numérique de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
On dit que (x_0, y_0) est un point *critique* de f si $f'_x(x_0, y_0) = 0$ et $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Exemple 5.4

Propriété 5.5

Si une fonction numérique f admet un extremum local en (x_0, y_0) alors (x_0, y_0) est un point critique de f.

Remarques 5.6

Exemple 5.7

Principe

On essaye de déterminer l'existence d'extrema d'une fonction numérique de deux variables f.
On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^2$ et que (x_0, y_0) en est un point critique.
On pose (*notations de Monge*) : $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \qquad s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \qquad t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$.
La formule de Taylor d'ordre 2 en un point critique (x_0, y_0) s'écrit donc :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}h^2 r + hks + \frac{1}{2}k^2 t + o(||(h, k)||^2).$$

Au voisinage de (x_0, y_0) la différence $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ dépend du signe de $h^2 r + 2hks + k^2 t$.
On pose $X = \dfrac{h}{k}$ et on obtient $h^2 r + 2hks + k^2 t = k^2 \left(r \left(\dfrac{h}{k}\right)^2 + 2s\dfrac{h}{k} + t \right) = k^2 \times (rX^2 + 2sX + t)$.
Pour obtenir un extremum local, il faut que le polynôme $rX^2 + 2sX + t$ soit de signe constant.
Autrement dit, il faut que ce soit bien un polynôme de degré 2 ($r \neq 0$) et que son discriminant soit strictement négatif ($4s^2 - 4rt = 4(s^2 - rt) < 0$).

Propriété 5.8

Soit f une fonction numérique de deux variables de classe $\mathscr{C}^2$ et (x_0, y_0) un point critique de f. Avec les notations précédentes, on a :
- Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ alors f admet un minimum local en (x_0, y_0).
- Si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$ alors f admet un maximum local en (x_0, y_0).
- Si $rt - s^2 < 0$ alors f n'admet pas d'extremum local en (x_0, y_0).
- Si $s^2 - rt = 0$, on ne peut rien dire.

Exemple 5.9

On cherche à déterminer les extrema locaux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto 3xy - x^3 - y^3$.

6 Applications

6.1 Fonction d'utilité en économie

Propriété 6.1

Si f est une fonction d'utilité dépendant de plusieurs paramètres, alors les dérivées partielles d'ordre 1 représentent les utilités marginales des différents paramètres.

6.2 Fonction de production en économie

Propriété 6.2

Si f est une fonction de production dépendant de plusieurs paramètres, alors les dérivées partielles d'ordre 1 représentent les productivités marginales des différents paramètres.

7 Extrémum lié par une contrainte

Principe

On chercher les extrema d'une fonction de deux variables f sachant que les variables sont liées par une équation du type $g(x, y) = 0$ appelée *contrainte*.

7.1 Méthode par substitution

Il s'agit de la méthode la plus simple en terme de raisonnement.
Si cela est possible, dans l'équation, $g(x, y) = 0$, on exprime l'une des variables x ou y en fonction de l'autre. Ensuite, on substitue la valeur de cette variable dans f.
On obtient alors une nouvelle fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sans contrainte que l'on peut optimiser de façon classique.

Exemple 7.1

On cherche les extrema de la fonction numérique f définie par $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 6xy - 2x$ sous la contrainte $g(x, y) = 2x - y + 1 = 0$.

7.2 Méthode du multiplicateur de Lagrange

On suppose que la fonction f admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2.
On appelle *Lagrangien* associé à f et à la contrainte g l'application notée L ou L_f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par $L(\lambda, x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$.
La variable λ est appelée le *multiplicateur de Lagrange*.

La matrice hessienne bordée du Lagrangien est $\overline{H}_L(\lambda, x, y) = \begin{pmatrix} L''_{\lambda^2}(\lambda, x, y) & L''_{\lambda x}(\lambda, x, y) & L''_{\lambda y}(\lambda, x, y) \\ L''_{x\lambda}(\lambda, x, y) & L''_{x^2}(\lambda, x, y) & L''_{xy}(\lambda, x, y) \\ L''_{y\lambda}(\lambda, x, y) & L''_{yx}(\lambda, x, y) & L''_{y^2}(\lambda, x, y) \end{pmatrix}$.

Pour tout point critique $A = (a, b, c)$ de L c'est-à-dire tout point tel que $L'_x(A) = L'_y(A) = L'_\lambda(A) = 0$, on a :

(i) si $\det(\overline{H}_L(A)) < 0$ alors A est un minimum.

(ii) si $\det(\overline{H}_L(A)) > 0$ alors A est un maximum.

Exemple 7.2

On cherche à optimiser la fonction numérique de deux variables f de l'exemple 7.1 c'est-à-dire $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 6xy - 2x$ sous la contrainte $g(x, y) = 2x - y + 1 = 0$ par la méthode de Lagrange.