# Optimisation des fonctions de trois variables

F. Wlazinski

Licence d'économie

## 1 Fonctions numériques de trois variables

On identifie les triplets $(x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ et les points dont les coordonnées sont $(x, y, z)$ dans l'espace euclidien muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.

**Définition 1.1**

Soient $A = (x_A, y_A, z_A)$ et $B = (x_B, y_B, z_B)$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$.
La *distance* de $A$ à $B$, notée $d(A, B)$, est la distance euclidienne entre les points correspondants dans l'espace euclidien c'est-à-dire $d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

**Définition 1.2**

Soit $r$ un réel strictement positif et $A = (x_A, y_A, z_A)$ un élément de $\mathbb{R}^3$.

- On appelle *sphère ouverte* de centre $A$ et de rayon $r$ et on note $\mathscr{B}_o(A, r)$ l'ensemble :
  $\mathscr{B}_o(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^3 / d(M, A) < r\}$.
- On appelle *sphère fermée* de centre $A$ et de rayon $r$ et on note $\mathscr{B}_f(A, r)$ l'ensemble :
  $\mathscr{B}_f(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^3 / d(M, A) \leq r\}$.

**Définition 1.3**

On appelle fonction *numérique de trois variables* toute fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.

**Exemple 1.4**

**Définition 1.5**

Soit $f$ une fonction numérique de trois variables. On appelle *ensemble de définition* de $f$ et on note $D_f$ l'ensemble des triplets $(x, y, z)$ pour lesquels on peut effectivement calculer $f(x, y, z)$.

**Exemple 1.6**

**Définition 1.7**

Soit $f$ une fonction numérique définie sur une partie $U$ ouverte de $\mathbb{R}^3$ et $A = (x_0, y_0, z_0) \in U$.
On dit que $f$ tend vers le réel $\ell$ lorsque $(x, y, z)$ tend vers $(x_0, y_0, z_0)$ si et seulement si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $r > 0$, tel que pour tout point $M(x, y, z) \in \mathscr{B}_o(A, r)$, on ait $|f(x, y, z) - \ell| \leq \varepsilon$.
On note $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = \ell$.

**Remarque 1.8**

**Exemple 1.9**

**Propriété 1.10**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions numériques définies sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^3$ et soit $(x_0, y_0, z_0) \in U$.
On suppose que $f$ a pour limite $\ell$ en $(x_0, y_0, z_0)$ et que $g$ a pour limite $\ell'$ en $(x_0, y_0, z_0)$. Alors :

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lim\limits_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} \lambda f(x,y,z) = \lambda \ell$

(ii) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z) + g(x,y,z) = \ell + \ell'$

(iii) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z) \times g(x,y,z) = \ell \times \ell'$

(iv) Si $\ell' \neq 0$, $\lim\limits_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} \dfrac{f(x,y,z)}{g(x,y,z)} = \dfrac{\ell}{\ell'}$

**Définition 1.11**

Soit $f$ une fonction numérique définie sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^3$ et soit $(x_0, y_0, z_0) \in U$.

- On dit que $f$ est *continue* en $(x_0, y_0, z_0)$ si et seulement si $\lim\limits_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z) = f(x_0, y_0, z_0)$.
- On dit que $f$ est *continue* sur $U$ si et seulement si $f$ est continue en tout point de $U$.

**Exemple 1.12**

**Propriété 1.13**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions numériques continues en un point $(x_0, y_0, z_0)$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Alors $\lambda f$, $f + g$, $f \times g$ et, si $g(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ sont continues en $(x_0, y_0, z_0)$.

**Propriété 1.14**

Soit $f$ une fonction numérique continue sur une partie $U$ de $\mathbb{R}^3$ et $g$ une fonction continue sur une partie $I$ de $\mathbb{R}$ telle que $f(U) \subset I$. Alors $g \circ f$ est continue sur $U$.

**Exemples 1.15**

**Propriété 1.16**

Soit $f$ une fonction numérique de trois variables continue en $(x_0, y_0, z_0)$.
Alors la fonction $f_x : t \mapsto f(t, y_0, z_0)$ est continue en $x_0$, la fonction $f_y : t \mapsto f(x_0, t, z_0)$ est continue en $y_0$ et la fonction $f_z : t \mapsto f(x_0, y_0, t)$ est continue en $z_0$.

**Remarque 1.17**

La réciproque de cette propriété est fausse.

# 2 Dérivées partielles

Dans toute cette partie les fonctions considérées seront définies sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^3$ et $(x_0, y_0, z_0)$ désigne un point de $U$.
Si $f$ est une fonction numérique définie sur $U$ on notera $f_x : t \mapsto f(t, y, z)$, $f_y : t \mapsto f(x, t, z)$ et $f_z : t \mapsto f(x, y, t)$ les applications partielles.

## 2.1 Dérivées partielles d'ordre 1

**Définition 2.1**

- On dit que $f$ admet une *dérivée partielle d'ordre* 1 *par rapport à* $x$ en $(x_0, y_0, z_0)$ si et seulement si la fonction $f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ t \mapsto f(t, y_0, z_0)$ est dérivable en $x_0$.

  La valeur de la dérivée en ce point est alors notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$ ou $f'_x(x_0, y_0, z_0)$.
- On dit que $f$ admet une *dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à* $y$ en $(x_0, y_0, z_0)$ si et seulement si la fonction $f_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ t \mapsto f(x_0, t, z_0)$ est dérivable en $y_0$.

La valeur de la dérivée en ce point est alors notée $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$ ou $f'_y(x_0, y_0, z_0)$.

• On dit que $f$ admet une *dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à $z$* en $(x_0, y_0, z_0)$ si et seulement si la fonction $f_z : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ t \mapsto f(x_0, y_0, t)$ est dérivable en $z_0$.

La valeur de la dérivée en ce point est alors notée $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$ ou $f'_z(x_0, y_0, z_0)$.

• On dit que $f$ admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à $x$ (resp. $y$ et $z$) sur $U$ si $f$ admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à $x$ (resp. $y$ et $z$) en tout point $(x, y, z)$ de $U$.

Les fonctions dérivées sont alors notées $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ ou $f'_x$, $f'_y$ et $f'_z$.

**Définition 2.2**

Si les applications $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ sont continues sur $U$, on dit que la fonction $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

**Remarque 2.3**

**Exemple 2.4**

## 2.2 Dérivées partielles d'ordre 2

**Définition 2.5**

Si une fonction numérique $f$ admet trois dérivées partielles d'ordre 1 notée $f'_x$, $f'_y$ et $f'_z$ et si ces trois fonctions de trois variables admettent elles-mêmes des dérivées partielles d'ordre 1, on appelle celles-ci des dérivées partielles d'ordre 2 de $f$. On note :

$$\begin{array}{lll}
f''_{x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) & f''_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) & f''_{xz} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right) \\
f''_{yx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) & f''_{y^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) & f''_{yz} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right) \\
f''_{zx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) & f''_{zy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) & f''_{z^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)
\end{array}.$$

**Exemple 2.6**

**Définition 2.7**

Si $f$ est une fonction numérique de classe $\mathscr{C}^1$ et si ses dérivées partielles $f'_x$, $f'_y$ et $f'_z$ sont aussi de classe $\mathscr{C}^1$, alors on dit que $f$ est *de classe $\mathscr{C}^2$* sur $U$.

**Propriété 2.8**

Si $f$ est une fonction numérique de classe $\mathscr{C}^2$ alors $f''_{yx} = f''_{xy}$, $f''_{zx} = f''_{xz}$ et $f''_{yz} = f''_{zy}$.

**Définition 2.9**

Soit $f$ une fonction numérique de trois variables de classe $\mathscr{C}^2$.
On appelle *matrice hessienne* de $f$ et on note $H_f(x, y, z)$ la matrice symétrique définie par :

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} f''_{x^2}(x, y, z) & f''_{xy}(x, y, z) & f''_{xz}(x, y, z) \\ f''_{yx}(x, y, z) & f''_{y^2}(x, y, z) & f''_{yz}(x, y, z) \\ f''_{zx}(x, y, z) & f''_{zy}(x, y, z) & f''_{z^2}(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

**Exemple 2.10**

**Propriété 2.11**

Soit $f$ une fonction numérique de classe $\mathscr{C}^2$ sur $U$ et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

La formule de Taylor à l'ordre 3 nous permet d'affirmer qu'il existe un voisinage $V$ de $(a, b, c)$ tel qu'en tout point $(a+h, b+k, c+\ell) \in V$, on ait :

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k,c+\ell) - f(a,b,c) = {} & hf'_x(a,b,c) + kf'_y(a,b,c) + \ell f'_z(a,b,c) \\ & + \frac{1}{2}\Big(h^2 f''_{x^2}(a,b,c) + k^2 f''_{y^2}(a,b,c) + \ell^2 f''_{z^2}(a,b,c) \\ & \quad + 2hk f''_{xy}(a,b,c) + 2h\ell f''_{xz}(a,b,c) + 2k\ell f''_{yz}(a,b,c)\Big) \\ & + o(\|(h,k,\ell)\|^2). \end{aligned}$$

**Exemple 2.12**

**Remarque 2.13**

# 3 Extremum local

**Définition 3.1**

Soit $f$ une fonction numérique de trois variables.

- On dit que $f$ admet un *minimum local* en $(x_0, y_0, z_0)$ s'il existe un réel $r > 0$ tel que $f(x, y, z) \geq f(x_0, y_0, z_0)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathscr{B}_o((x_0, y_0, z_0), r) \cap U$.
- On dit que $f$ admet un *maximum local* en $(x_0, y_0, z_0)$ s'il existe un réel $r > 0$ tel que $f(x, y, z) \leq f(x_0, y_0, z_0)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathscr{B}_o((x_0, y_0, z_0), r) \cap U$.
- On dit que $f$ admet un *extremum local* en $(x_0, y_0, z_0)$ lorsque $f$ admet soit un minimum soit un maximum local en ce point.

**Définition 3.2**

Soit $f$ une fonction numérique de classe $\mathscr{C}^1$ sur $U$. On dit que $(x_0, y_0, z_0)$ est un point *critique* de $f$ si $f'_x(x_0, y_0, z_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0, z_0) = 0$ et $f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0$.

**Exemple 3.3**

**Propriété 3.4**

Si une fonction numérique $f$ admet un extremum local en $(x_0, y_0, z_0)$ alors $(x_0, y_0, z_0)$ est un point critique de $f$.

**Remarques 3.5**

**Propriété 3.6**

Soit $f$ une fonction numérique de deux variables de classe $\mathscr{C}^2$ et $(x_0, y_0)$ un point critique de $f$.

- Si $H_f(x_0, y_0)$ est définie positive (c'est-à-dire si $|H_f(x_0, y_0)|_1 > 0$ et $|H_f(x_0, y_0)|_2 > 0$) alors $f$ admet un minimum local en $(x_0, y_0)$.
- Si $H_f(x_0, y_0)$ est définie négative (c'est-à-dire si $|H_f(x_0, y_0)|_2 < 0$ et $|H_f(x_0, y_0)|_2 > 0$) alors $f$ admet un maximum local en $(x_0, y_0)$.
- Si $H_f(x_0, y_0) \neq 0$ n'est ni positive ni négative alors $(x_0, y_0)$ est un point de selle (ou col) de $f$.

**Propriété 3.7**

Soit $f$ une fonction numérique de trois variables de classe $\mathscr{C}^2$ et $(x_0, y_0, z_0)$ un point critique de $f$.

- Si $H_f(x_0, y_0, z_0)$ est définie positive alors $f$ admet un minimum local en $(x_0, y_0, z_0)$.
- Si $H_f(x_0, y_0, z_0)$ est définie négative alors $f$ admet un maximum local en $(x_0, y_0, z_0)$.
- Si $H_f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ n'est ni positive ni négative alors $(x_0, y_0, z_0)$ est un point de selle (ou col) de $f$.

**Rappel**

- Une matrice est définie positive si ses mineurs principaux croissants $|M|_1$, $|M|_2$ et $|M|_3$ sont tous les trois strictement positifs.
- Une matrice est définie négative si $|M|_1 < 0$, $|M|_2 > 0$ et $|M|_3 < 0$.

**Exemple 3.8**

**Exemple 3.9**

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = ye^{z^2} - \dfrac{1}{2}y^2 + x^2(\ln(y) - 1)$.
Vérifier que $a = (0; 1; 0)$ est un point critique et donner sa nature.

# 4 Extrémum lié par une contrainte

**Principe**

On chercher les extrema d'une fonction de deux (resp. trois) variables $f$ sachant que les variables sont liées par une du type $g(x, y) = 0$ (resp. $g(x, y, z) = 0$) appelée *contrainte*.

## 4.1 Méthode par substitution pour une fonction de deux variables

Il s'agit de la méthode la plus simple en terme de raisonnement.
Si cela est possible, dans l'équation, $g(x, y) = 0$, on exprime l'une des variables $x$ ou $y$ en fonction de l'autre. Ensuite, on substitue la valeur de cette variable dans $f$.
On obtient alors une nouvelle fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sans contrainte que l'on peut optimiser de façon classique.

## 4.2 Méthode du multiplicateur de Lagrange pour une fonction de deux variables

**Remarque 4.1**

**Principe**

On suppose que la fonction $f$ admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2.
On appelle *Lagrangien* associé à $f$ et à la contrainte $g$ l'application notée $L$ ou $L_f$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par $L(\lambda, x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$.
La variable $\lambda$ est appelée le *multiplicateur de Lagrange*.

La matrice hessienne bordée du Lagrangien est $\overline{H}_L(\lambda, x, y) = \begin{pmatrix} L''_{\lambda^2}(\lambda, x, y) & L''_{\lambda x}(\lambda, x, y) & L''_{\lambda y}(\lambda, x, y) \\ L''_{x\lambda}(\lambda, x, y) & L''_{x^2}(\lambda, x, y) & L''_{xy}(\lambda, x, y) \\ L''_{y\lambda}(\lambda, x, y) & L''_{yx}(\lambda, x, y) & L''_{y^2}(\lambda, x, y) \end{pmatrix}$.

Pour tout point critique $A = (a, b, c)$ de $L$ c'est-à-dire tout point tel que $L'_x(A) = L'_y(A) = L'_\lambda(A) = 0$, on a :

(i) si $\det(\overline{H}_L(A)) < 0$ alors $A$ est un minimum.

(ii) si $\det(\overline{H}_L(A)) > 0$ alors $A$ est un maximum.

## 4.3 Méthode du multiplicateur de Lagrange pour une fonction de trois variables

**Principe**

On suppose que la fonction $f$ admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2.
On appelle *Lagrangien* associé à $f$ et à la contrainte $g$ l'application notée $L$ ou $L_f$ de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$ définie par $L(\lambda, x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$.

La matrice hessienne bordée du Lagrangien est :

$$\overline{H}_L(\lambda,x,y,z) = \begin{pmatrix} L''_{\lambda^2}(\lambda,x,y,z) & L''_{\lambda x}(\lambda,x,y,z) & L''_{\lambda y}(\lambda,x,y,z) & L''_{\lambda z}(\lambda,x,y,z) \\ L''_{x\lambda}(\lambda,x,y,z) & L''_{x^2}(\lambda,x,y,z) & L''_{xy}(\lambda,x,y,z) & L''_{xz}(\lambda,x,y,z) \\ L''_{y\lambda}(\lambda,x,y,z) & L''_{yx}(\lambda,x,y,z) & L''_{y^2}(\lambda,x,y,z) & L''_{yz}(\lambda,x,y,z) \\ L''_{z\lambda}(\lambda,x,y,z) & L''_{zx}(\lambda,x,y,z) & L''_{zy}(\lambda,x,y,z) & L''_{z^2}(\lambda,x,y,z) \end{pmatrix}.$$

Pour tout point critique $A = (a,b,c,d)$ de $L$ c'est-à-dire tout point tel que $L'_x(A) = L'_y(A) = L'_z(A) = L'_\lambda(A) = 0$, on a :

i si $\left|\overline{H}_L(A)\right|_3 < 0$ et $\left|\overline{H}_L(A)\right|_4 \left(= \det(\overline{H}_L(A))\right) < 0$ alors $A$ est un minimum.

ii si $\left|\overline{H}_L(A)\right|_3 > 0$ et $\left|\overline{H}_L(A)\right|_4 < 0$ alors $A$ est un maximum.

**Exemple 4.2**

## 5 Extrémum lié par deux contraintes

**Principe**

On chercher les extrema d'une fonction de trois variables $f$ sachant que les variables sont liées par deux équations du type $g_1(x,y,z) = 0$ et $g_2(x,y,z) = 0$ appelée *contraintes*.
On priviligiera une méthode par substitution lorsque c'est possible.

**Exemples 5.1**

## 6 Généralisation

Dans toute cette partie, $n \geq 2$ est un entier, $D$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$, $f$ est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire une fonction numérique de $n$ variables définie sur $D$ et $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est un point de $D$.

**Principe**

On cherche à optimiser $f$. Autrement dit, on cherche à déterminer les points $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ de $\mathbb{R}^n$ qui rendent $f$ maximale ou minimale. Cette démarche est essentielle dans beaucoup de domaines. C'est vrai, en particulier, en économie, par exemple, pour les coûts de production, les bénéfices, la consommation etc.

**Définition 6.1**

On dit que $f$ possède un *maximum global* (respectivement un *minimum global*) sur $D$ en $A$ si, pour tout $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $D$, on a $f(M) \leq f(A)$ (respectivement $f(M) \geq f(A)$).
On dit que $f$ possède un *extremum global* sur $D$ en $A$ si $f$ admet en $A$ un maximum global ou un minimum global.

**Définition 6.2**

On dit que $f$ possède un *maximum local* (respectivement un *minimum local*) en $A$ s'il existe un voisinage $V$ de $A$ tel que, pour tout $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $D \cap V$, on a $f(M) \leq f(A)$ (respectivement $f(M) \geq f(A)$).
On dit que $f$ possède un *extremum local* en $A$ si $f$ admet en $A$ un maximum local ou un minimum local.

**Définition 6.3**

Pour tout réel $t$ et pour tout entier $1 \leq i \leq n$, soit $A_i(t)$ le point obtenu à partir de $A$ en substituant $t$ à $a_i$ la $i$-ème coordonnée de $A$.

On dit que $f$ admet une *dérivée partielle d'ordre* 1 *par rapport à* $x_i$ en $A$ si et seulement si la fonction $f_{x_i} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \mapsto f(A_i(t))$ est dérivable en $a_i$.
Cette fonction est alors notée $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ ou $f'_{x_i}$.

**Définition 6.4**

On dit que $A$ est un point critique de $f$ si $f'_{x_i}(A) = 0$ pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$ .

**Propriété 6.5**

Si la fonction $f$ admet un extremum local en $A$, alors $A$ est un point critique de $f$.

**Définition 6.6**

Pour tous les entiers $1 \leq i, j \leq n$, on dit que $f$ admet une *dérivée partielle d'ordre* 2 *par rapport à* $x_j$ et $x_i$ en $A$ si et seulement si la fonction $M \mapsto f'_{x_i}(M)$ admet une dérivée partielle d'ordre 1 en $A$ par rapport à $x_j$.
Si $f$ admet $n$ dérivées partielles d'ordre 1 notée $\left(f'_{x_i}\right)_{i=1,n}$ et si ces deux fonctions de trois variables admettent elles-mêmes des dérivées partielles d'ordre 1, on appelle celles-ci des dérivées partielles d'ordre 2 de $f$. On note $f''_{x_j,x_i} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ et $f''_{x_i^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)$.

**Propriété 6.7**

On suppose que $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $D$.
Il existe un voisinage $V$ de $A$ telle qu'en tout point $A + H = (a_1 + h_1, a_2 + h_2, \ldots, a_n + h_n) \in V$ avec $H = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$, on ait :

$$f(A+H) - f(A) = \sum_{i=1}^{n} h_i f'_{x_i}(A) + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i^2 f''_{x_i^2}(A) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i h_j f''_{x_i,x_j}(A)\right) + o(||H||^2).$$

**Propriété 6.8**

Avec les notations de la propriété 6.7, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} h_i^2 f''_{x_i^2}(A) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i h_j f''_{x_i,x_j}(A)$ est une forme quadratique dont la matrice de la forme polaire associée est la valeur de la matrice hessienne en $A$ :

$$H_f(A) = \begin{pmatrix} f''_{x_1^2}(A) & f''_{x_1,x_2}(A) & \ldots & f''_{x_1,x_n}(A) \\ f''_{x_2,x_1}(A) & f''_{x_2^2}(A) & \ldots & f''_{x_2,x_n}(A) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f''_{x_n,x_1}(A) & f''_{x_n x_2}(A) & \ldots & f''_{x_n^2}(A) \end{pmatrix}.$$

**Propriété 6.9**

Pour tout point critique $A$ de $f$, on a :

(i) Si $H_f(A)$ est définie positive alors $f$ admet un minimum local en $A$.

(ii) Si $H_f(A)$ est définie négative alors $f$ admet un maximum local en $A$.

**Définition 6.10**

On suppose que $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $D$. On appelle Lagrangien associé à $f$ et à la contrainte $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ l'application $L : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}; (\lambda, x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
Si $M_\lambda = (\lambda, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, la matrice hessienne bordée du Lagrangien est :

$$\overline{H}_L(M_\lambda) = \begin{pmatrix} L''_{\lambda^2}(M_\lambda) & L''_{\lambda x_1}(M_\lambda) & L''_{\lambda x_2}(M_\lambda) & \dots & L''_{\lambda x_n}(M_\lambda) \\ L''_{x_1\lambda}(M_\lambda) & L''_{x_1^2}(M_\lambda) & L''_{x_1x_2}(M_\lambda) & \dots & L''_{x_1x_n}(M_\lambda) \\ L''_{x_2\lambda}(M_\lambda) & L''_{x_2x_1}(M_\lambda) & L''_{x_2^2}(M_\lambda) & \dots & L''_{x_2x_n}(M_\lambda) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ L''_{x_n\lambda}(M_\lambda) & L''_{x_nx_1}(M_\lambda) & L''_{x_nx_2}(M_\lambda) & \dots & L''_{x_n^2}(M_\lambda) \end{pmatrix}.$$

**Propriété 6.11**

Avec une contrainte, si $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $D$, si $A$ est un point critique de $L$ et si on note $|\overline{H}_L(A)|_k$ le $k$-ième mineur principal croissant de la matrice hessienne bordée du Lagrangien en $A$, alors

(i) Si, pour tout entier $k$ tel que $3 \leq k(\leq n+1)$, on a $|\overline{H}_L(A)|_k < 0$ alors $A$ est un minimum local.

(ii) Si, pour tout entier $k$ tel que $3 \leq k(\leq n+1)$, les $|\overline{H}_L(A)|_k$ sont alternativement strictement positifs et strictement négatifs, le premier étant strictement positif c'est-à-dire $|\overline{H}_L(A)|_3 > 0$ alors $A$ est un maximum local.

**Définition 6.12**

On suppose que $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $D$. On appelle Lagrangien associé à $f$ et aux $p(\geq 2)$ contraintes $g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, $g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, $\dots$, $g_p(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ l'application $L : \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}$; $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p, x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_2 g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots \lambda_p g_p(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
Si $M_\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p, x_1, x_2, \dots, x_n)$, la matrice hessienne bordée $\overline{H}_L(M_\Lambda)$ du Lagrangien est :

$$\begin{pmatrix} L''_{\lambda_1^2}(M_\Lambda) & L''_{\lambda_1\lambda_2}(M_\Lambda) & \dots & L''_{\lambda_1\lambda_p}(M_\Lambda) & L''_{\lambda_1x_1}(M_\Lambda) & L''_{\lambda_1x_2}(M_\Lambda) & \dots & L''_{\lambda_1x_n}(M_\Lambda) \\ L''_{\lambda_2\lambda_1}(M_\Lambda) & L''_{\lambda_2^2}(M_\Lambda) & \dots & L''_{\lambda_2\lambda_p}(M_\Lambda) & L''_{\lambda_2x_1}(M_\Lambda) & L''_{\lambda_2x_2}(M_\Lambda) & \dots & L''_{\lambda_2x_n}(M_\Lambda) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ L''_{\lambda_p\lambda_1}(M_\Lambda) & L''_{\lambda_p^2}(M_\Lambda) & \dots & L''_{\lambda_p\lambda_p}(M_\Lambda) & L''_{\lambda_px_1}(M_\Lambda) & L''_{\lambda_px_2}(M_\Lambda) & \dots & L''_{\lambda_px_n}(M_\Lambda) \\ L''_{x_1\lambda_1}(M_\Lambda) & L''_{\lambda_1\lambda_2}(M_\Lambda) & \dots & L''_{\lambda_1\lambda_p}(M_\Lambda) & L''_{x_1^2}(M_\Lambda) & L''_{x_1x_2}(M_\Lambda) & \dots & L''_{x_1x_n}(M_\Lambda) \\ L''_{x_2\lambda_1}(M_\Lambda) & L''_{x_2\lambda_2}(M_\Lambda) & \dots & L''_{x_2\lambda_p}(M_\Lambda) & L''_{x_2x_1}(M_\Lambda) & L''_{x_2^2}(M_\Lambda) & \dots & L''_{x_2x_n}(M_\Lambda) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ L''_{x_n\lambda_1}(M_\Lambda) & L''_{x_n\lambda_2}(M_\Lambda) & \dots & L''_{x_n\lambda_p}(M_\Lambda) & L''_{x_nx_1}(M_\Lambda) & L''_{x_nx_2}(M_\Lambda) & \dots & L''_{x_n^2}(M_\Lambda) \end{pmatrix}.$$

**Propriété 6.13**

Avec $p(\geq 2)$ contraintes, si $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $D$, si $A$ est un point critique de $L$ et si on note $|\overline{H}_L(A)|_k$ le $k$-ième mineur principal croissant de la matrice hessienne bordée du Lagrangien en $A$, alors :

(i) Si, pour tout entier $k$ tel que $p+2 \leq k(\leq n+p)$, les $|\overline{H}_L(A)|_k$ sont du signe de $(-1)^p$ alors $A$ est un minimum local.

(ii) Si, pour tout entier $k$ tel que $p+2 \leq k(\leq n+p)$, les $(-1)^k|\overline{H}_L(A)|_k$ sont du signe de $(-1)^p$ alors $A$ est un maximum local.