Formes quadratiques

F. Wlazinski

Licence d'économie

Dans tout ce cours, $(e) = (e_1, e_2, e_3)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1 Formes bilinéaires

Définition 1.1

Une *forme bilinéaire* f sur $\mathbb{R}^3$ est une application de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ linéaire par rapport à chaque variable.
Autrement dit, l'application f vérifie les propriétés suivantes pour tous les vecteurs u, v et et w de $\mathbb{R}^3$ et tous les réels α et β :

(i) $f(\alpha u + \beta v, w) = \alpha f(u, w) + \beta f(v, w)$

(ii) $f(u, \alpha v + \beta w) = \alpha f(u, v) + \beta f(u, w)$

On dit de plus que f est *symétrique* si $f(u, v) = f(v, u)$.

Exemple 1.2

Propriété 1.3

Une forme bilinéaire f sur $\mathbb{R}^3$ est entièrement déterminée par les 9 images $f(e_i; e_j)$ où i et j varient de 1 à 3.

Remarque 1.4

On suppose que $u = (x, y, z) = x(1; 0; 0) + y(0; 1; 0) + z(0; 0; 1) = xe_1 + ye_2 + ze_3$.
Et $v = (x', y', z') = x'(1; 0; 0) + y'(0; 1; 0) + z'(0; 0; 1) = x'e_1 + y'e_2 + z'e_3$.
Alors
$$\begin{aligned} f(u, v) &= f(xe_1 + ye_2 + ze_3; x'e_1 + y'e_2 + z'e_3) \\ &= xx'f(e_1; e_1) + xy'f(e_1; e_2) + xz'f(e_1; e_3) \\ &\quad + yx'f(e_2; e_1) + yy'f(e_2; e_2) + yz'f(e_2; e_3) \\ &\quad + zx'f(e_3; e_1) + zy'f(e_3; e_2) + zz'f(e_3; e_3) \end{aligned}$$

Définition 1.5

Soit f une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$.
On appelle *matrice représentative* de f dans la base (e) et on note $\mathscr{M}_e(f)$ la matrice $(f(e_i; e_j))_{i,j=1,3}$.

Remarque 1.6

Exemple 1.7

Remarque 1.8

Une forme bilinéaire est symétrique si et seulement si sa matrice $\mathscr{M}_e(f)$ est symétrique.

Propriété 1.9

Réciproquement, une matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définit une unique forme bilinéaire f sur $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathscr{M}_e(f) = M$.

Exemple 1.10

2 Formes quadratiques et matrices

Définition 2.1

Soit f une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$.
On appelle *forme quadratique* associée à f, et on note Q_f, q_f ou simplement q, l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par $q_f(u) = f(u,u)$.
On dit que f est la *forme polaire* de q_f.

Exemple 2.2

Propriété 2.3

Soit f une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$ et q_f sa forme quadratique associée.
Pour tous les vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$, on a $f(u,v) = \dfrac{1}{2}\left(q_f(u+v) - q_f(u) - q_f(v)\right)$.

Remarques 2.4

Exemple 2.5

Définition 2.6

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de 3 variables. On dit que f est *homogène* de degré $k \in \mathbb{N}^*$ si pour tout $M = (x,y,z)$ de D_f et pour tout réel λ, on a $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^k f(x,y,z)$.

Exemple 2.7

Propriété 2.8

Une forme quadratique est un polynôme homogène de degré 2.

Remarque 2.9

3 Signe d'une forme quadratique

Définition 3.1

Soient f une forme bilinéaire symétrique et q_f sa forme quadratique associée. On dit que q_f est :

(i) *définie* si $q_f(u) = 0 \;\Rightarrow\; u = 0$

(ii) *positive* si $q_f(u) \geq 0$ pour tout vecteur u.

(iii) *négative* si $q_f(u) \leq 0$ pour tout vecteur u.

Remarque 3.2

Propriété 3.3

Soient f une forme bilinéaire symétrique, q_f sa forme quadratique associée et $\mathscr{M}_e(f)$ sa matrice représentative.

(i) q_f est positive si et seulement si toutes les valeurs propres de $\mathscr{M}_e(f)$ sont positives.

(ii) q_f est définie positive si et seulement si toutes les valeurs propres de $\mathscr{M}_e(f)$ sont strictement positives.

(iii) q_f est négative si et seulement si toutes les valeurs propres de $\mathscr{M}_e(f)$ sont négatives.

(iv) q_f est définie négative si et seulement si toutes les valeurs propres de $\mathscr{M}_e(f)$ sont strictement négatives.

Exemple 3.4

Propriété 3.5

Toute forme quadratique peut s'écrire comme une somme (addition ou soustraction) de carrés.

Remarque 3.6

La méthode standard permettant d'écrire une forme quadratique comme somme de carrés est appelée *méthode de Gauss*.

Exemples 3.7

Propriété 3.8

Le nombre r de coefficients strictement positifs devant les carrés et le nombre s de coefficients strictement négatifs devant les carrés dans l'écriture en somme de carrés d'une forme quadratique q sont des invariants de q.
Le couple (r, s) s'appelle la signature de q et cette propriété s'appelle *la loi d'inertie de Sylvester*.

Exemple 3.9

Propriété 3.10

Soit (r, s) la signature d'une forme quadratique q sur $\mathbb{R}^3$. Alors

(i) si $s = 0$ alors q est positive.

(ii) si $r = 0$ alors q est négative.

(iii) si $(r, s) = (3, 0)$ alors q est définie positive.

(iv) si $(r, s) = (0, 3)$ alors q est définie négative.

Exemple 3.11

Définition 3.12

Pour toute matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ où $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *mineurs principaux (croissants ou diagonaux)* la suite des déterminants notée $(|A_i|)_{i=1,n}$ des matrices carrées issues de A en ne conservant que les i premières lignes (et colonnes).

Exemple 3.13

Propriété 3.14

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans (e) de f sa forme polaire est M.

(i) Si tous les mineurs principaux croissants de M sont positifs alors q est positive.

(ii) Si tous les mineurs principaux croissants de M sont strictement positifs alors q est définie positive.

(iii) si $|M_1| \leq 0$, $|M_2| \geq 0$ et $|M_3| \leq 0$ alors q est négative.

(iv) si $|M_1| < 0$, $|M_2| > 0$ et $|M_3| < 0$ alors q est définie négative.

Exemple 3.15

Exemple 3.16

Exemple 3.17

4 Généralisation

Définition 4.1

Soit $n \geq 2$ un entier. Une *forme bilinéaire* f sur $\mathbb{R}^n$ est une application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ linéaire par rapport à chaque variable.

Définition 4.2

Soit f une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$ où $n \geq 2$ et soit (e) une base de $\mathbb{R}^n$.
On appelle *matrice représentative* de f dans la base (e) et on note $\mathscr{M}_e(f)$ la matrice $(f(e_i; e_j))_{i,j=1,n}$.

Définition 4.3

Soit f une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$ où $n \geq 2$.
On appelle *forme quadratique* associée à f, et on note Q_f, q_f ou simplement q, l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par $q_f(u) = f(u, u)$.
On dit que f est la *forme polaire* de q_f.

Propriété 4.4

Soit (r, s) la signature d'une forme quadratique q sur $\mathbb{R}^n$ où $n \geq 2$. Alors

(i) si $s = 0$ alors q est positive.

(ii) si $r = 0$ alors q est négative.

(iii) si $(r, s) = (n, 0)$ alors q est définie positive.

(iv) si $(r, s) = (0, n)$ alors q est définie négative.

Propriété 4.5

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ de forme polaire f dont la matrice dans une base (e) de $\mathbb{R}^n$ est $M_e(f)$.

(i) Si tous les mineurs principaux croissants de $M_e(f)$ sont positifs alors q est positive.

(ii) Si tous les mineurs principaux croissants de $M_e(f)$ sont strictement positifs alors q est définie positive.

(iii) Si tous les mineurs principaux croissants de $M_e(f)$ sont alternativement positifs et négatifs, le premier étant négatif alors q est négative.

(iv) Si tous les mineurs principaux croissants de $M_e(f)$ sont alternativement strictement positifs et strictement négatifs, le premier étant strictement négatif alors q est définie négative.