Equations différentielles linéaires

1 Equations différentielles d'ordre 1

Une équation linéaire du premier ordre est une équation différentielle qui peut se mettre sous la forme :
(3) : $a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0$
où a, b et c sont des applications continues sur des intervalles à préciser.
L'équation est dite normalisée si $a(x) = 1 (\forall x)$ c'est-à-dire si elle est de la forme (3′) : $y' + b(x)y + c(x) = 0$.
• La solution d'une équation linéaire du premier ordre normalisée et sans second membre c'est-à-dire sous la forme (3″) : $y' + \beta(x)y = 0$ est $y = ke^{-B(x)}$ où $k \in \mathbb{R}$ et B est une primitive de β.
• Les solutions générales de (3) s'obtiennent en ajoutant les solutions de l'équation sans second membre (3″) et une solution particulière obtenue de la première solution par la méthode de la variation de la constante, i.e., en remplaçant k par $k(x)$.

2 Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

2.1 Equations sans second membre

Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre est une équation différentielle qui peut se mettre sous la forme :
(4) : $ay'' + by' + cy = 0$ où a, b et $c \in \mathbb{R}$
On conclut à partir du discriminant du polynôme caractéristique $P = aX^2 + bX + c$.

i. Si $\Delta > 0$ et si r_1 et r_2 sont les racines de P alors les solutions de (4) sont de la forme :
   $y = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

ii. Si $\Delta = 0$ et si r est la racine double de P alors les solutions de (4) sont de la forme :
   $y = (\lambda x + \mu)e^{rx}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

iii. Si $\Delta < 0$ et si $r_1 = \alpha + \beta i$ et $r_2 = \alpha - \beta i$ sont les racines de P alors les solutions de (4) sont de la forme :
   $y = e^{\alpha x}(\lambda \cos \beta x + \mu \sin \beta x)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Les réels λ et μ peuvent se déterminer grâce aux conditions initiales (souvent les valeurs de u_0 et de u_1).

2.2 Equations avec second membre de type exponentielle-polynôme

Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre de type exponentielle-polynôme est une équation différentielle qui peut se mettre sous la forme :
(5) : $ay'' + by' + cy = f(x)$
où a, b et $c \in \mathbb{C}$ $(a \neq 0)$ et f est une somme de fonctions de la forme $Q(x)e^{mx}$ où $m \in \mathbb{C}$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$.
Les solutions de (5) s'obtiennent en faisant la somme des solutions générales de (4) et d'une solution particulière de (5) qui est obtenue de la façon suivante :

• Si $f(x) = Q(x)e^{mx}$ avec Q polynôme de degré n alors une solution particulière de (5) est de la forme $y_0 = R(x)e^{mx}$ avec :
$\deg R = n$ si m n'est pas racine du polynôme caractéristique.
$\deg R = n + 1$ si m est une racine simple du polynôme caractéristique.
$\deg R = n + 2$ si m est une racine double du polynôme caractéristique.

• Cas particulier, si $f(x) = Q(x)$ (c'est-à-dire $m = 0$) avec Q polynôme de degré n alors une solution particulière de (5) est de la forme $y_0 = R(x)$ où R est un polynôme tel que :
$\deg R = n$ si $c \neq 0$,
$\deg R = n + 1$ si $c = 0$ et $b \neq 0$,
$\deg R = n + 2$ si $c = 0$ et $b = 0$

• Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ alors une solution particulière de (5) est $y_0 = y_1 + y_2$ avec :
y_1 une solution particulière de $ay'' + by' + cy = f_1(x)$
y_2 une solution particulière de $ay'' + by' + cy = f_2(x)$