Suites récurrentes linéaires

1 Suites récurrentes linéaires d'ordre 1

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout entier n, une équation du type (1) : $u_{n+1} = a \times u_n + b_n$, où a est un réel et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite, sont appelées suites récurrentes linéaires d'ordre 1.
Les solutions de l'équation (1) ont pour terme général : $u_n = K \times a^n + s_n$ où :

i. $K \in \mathbb{R}$ se détermine grâce aux conditions initiales (généralement la valeur de u_0 ou de u_1)

ii. $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une solution particulière de l'équation (1).

Si $b_n = c^n \times P(n)$ avec P un polynôme alors on cherche une solution particulière de la forme :

i. $s_n = c^n \times Q(n)$ avec $\deg(Q) = \deg(P)$ si $c \neq a$

ii. $s_n = n \times c^n \times Q(n)$ avec $\deg(Q) = \deg(P)$ si $c = a$

Cas particulier : si $b_n = \lambda \times c^n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ alors on cherche une solution particulière de la forme :

i. $s_n = kc^n$ si $c \neq a$

ii. $s_n = knc^n$ si $c = a$

Au cas où $b_n = c_1^n \times P_1(n) + c_2^n \times P_2(n)$, on applique les règles précédentes à chacun des deux termes de b_n. Puis on additionne les solutions particulières respectives. Cela s'applique aussi à des sommes de $p(\geq 3)$ termes.

2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 sans second membre

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout entier n, une équation du type $(2a)$: $u_{n+2} + \alpha.u_{n+1} + \beta.u_n = 0$ où α et β sont des réels sont appelées suites récurrentes linéaires d'ordre 2 sans second membre ou homogènes.
On conclut à partir du discriminant de l'équation caractéristique $(2')$: $r^2 + \alpha r + \beta = 0$.

i. Si $\Delta > 0$ et si r_1 et r_2 sont les deux solutions réelles de $(2')$ alors les solutions de l'équation $(2a)$ sont de terme géneral : $u_n = k \times r_1^n + \ell \times r_2^n$ où $k, \ell \in \mathbb{R}$.

ii. Si $\Delta = 0$ et si r_0 est la solution double de $(2')$ alors les solutions de l'équation $(2a)$ sont de terme géneral : $u_n = (kn + \ell) \times r_0^n$ où $k, \ell \in \mathbb{R}$.

iii. Si $\Delta < 0$ et si $r_1 = \rho e^{-i\theta}$ et $r_2 = \rho e^{i\theta}$ sont les deux solutions complexes de $(2')$ alors les solutions de l'équation $(2a)$ sont de terme géneral : $u_n = \rho^n \times (k\cos(\theta n) + \ell \sin(\theta n))$ où $k, \ell \in \mathbb{R}$.

Les réels k et ℓ peuvent se déterminer grâce aux conditions initiales (souvent les valeurs de u_0 et de u_1).

3 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 avec second membre

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout entier n, une équation du type $(2b)$: $u_{n+2} + \alpha.u_{n+1} + \beta.u_n = b_n$, où α et β sont des réels et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite, sont appelées suites récurrentes linéaires d'ordre 2 avec second membre ou non homogènes.
Les solutions de l'équation $(2b)$ sont de terme géneral : $u_n = v_n + s_n$ où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la solution générale de $(2a)$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une solution particulière de $(2b)$.

Si $b_n = c^n \times P(n)$ avec P un polynôme alors on cherche une solution particulière de la forme :

i. $s_n = c^n \times Q(n)$ avec $\deg(Q) = \deg(P)$ si c n'est pas une racine de $(2')$

ii. $s_n = nc^n \times Q(n)$ avec $\deg(Q) = \deg(P)$ si c est une racine simple de $(2')$

iii. $s_n = n^2c^n \times Q(n)$ avec $\deg(Q) = \deg(P)$ si c est une racine double de $(2')$

Au cas où $b_n = c_1^n \times P_1(n) + c_2^n \times P_2(n)$, on applique les règles précédentes à chacun des deux termes de b_n. Puis on additionne les solutions particulières respectives. Cela s'applique aussi à des sommes de $p(\geq 3)$ termes.