Les nombres complexes

F. Wlazinski

Licence d'économie

1 Equations et ensembles

La résolution d'équations est au centre de cette petite réflexion sur les ensembles mathématiques que vous connaissez.
Au début étaient les nombres entiers : 1, 2, 3, 4, ...
Des problèmes peuvent être énoncés avec ces nombres :
"J'ai acheté 2 poireaux à 1 euro pièce et 3 kilogrammes de pommes à 2 euros le kilogramme. Il reste 17 euros dans mon porte-monnaie. Combien y avait-il avant ces achats?"
En notant x le contenu du porte-monnaie en euros avant les achats, le problème ci-dessus peut être traduit en l'équation $x - 2 \times 1 - 3 \times 2 = 17$ c'est-à-dire $x - 8 = 17$ relativement simple à résoudre pour un étudiant post-bac.
Mais ces nombres entiers (naturels), dont l'ensemble est noté $\mathbb{N}$, ont rapidement montré leur limite.
Au cours de votre scolarité, vous avez eu l'occasion de découvrir d'autres ensembles. Ils vous ont permis de donner des solutions à des équations qui n'en avaient pas avant. Par exemple, la résolution des équations $2x + 3 = 1$, $5x = -3$, $3x = 5$ et $x^2 = 3$ nécessitent respectivement la construction des ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.
On remarquera que $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{D} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.

Néanmoins, ce n'est pas terminé car les polynômes n'ont pas tous des racines dans $\mathbb{R}$. Plus précisement, les polynômes de degré 2 de discrimant strictement négatif n'ont pas de solution réelle.

2 Introduction

Remarque 2.1

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes a été introduit, entre autre, pour résoudre les équations de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif. Dans un premier temps, la notation $\sqrt{-1}$ a été utilisée pour l'une des deux solutions de l'équation $x^2 + 1 = 0$. Mais cette notation a montré ses limites et est source d'erreurs. D'où l'introduction du terme i qui vérifie $i^2 = -1$. Et il est strictement interdit d'utiliser le sigle $\sqrt{\ }$ pour un réel négatif ou pour un complexe non réel.
Il existe plusieurs méthodes pour construire l'ensemble $\mathbb{C}$. Une des plus classiques est celle qui suit. Toutefois, dans ce cours, nous allons plus nous intéresser aux propriétés du corps des complexes que de sa construction. Celle-ci est donc donnée à titre indicatif et permet de justifier la suite du cours. Il est quand-même à signaler que les propriétés et les remarques de cette partie seront à connaître car elles serviront régulièrement.

Construction de $\mathbb{C}$

On travaille sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ où l'on définit deux lois $+$ et $\times$ de la façon suivante :
$\forall (a,b),(a',b') \in \mathbb{R}^2$, $(a,b) + (a',b') = (a + a', b + b')$ et $(a,b) \times (a',b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$.
(Faire attention car certains $+$ et $-$ sont ceux de $\mathbb{R}$).

$\mathbb{R}^2$ muni de ces deux lois possède une structure de corps commutatif c'est-à-dire vérifie les onze propriétés suivantes : (Par soucis de clarté et à fin de réutilisation car on pourra bientôt lire $\mathbb{C}$ à la place de $\mathbb{R}^2$, les éléments de $\mathbb{R}^2$ sont notés z à la place de (x, y).)

1. La loi + est une loi de composition interne sur $\mathbb{R}^2$: si $z_1 \in \mathbb{R}^2$ et $z_2 \in \mathbb{R}^2$ alors $z_1 + z_2 \in \mathbb{R}^2$.
2. La loi + est associative : $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}^2$, $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$.
3. La loi + admet un élément neutre (unique) : $\forall z_1 \in \mathbb{R}^2$, $z_1 + (0, 0) = (0, 0) + z_1 = z_1$.
4. Tout élément de $\mathbb{R}^2$ admet un symétrique (unique) pour la loi + : $\forall z_1 \in \mathbb{R}^2$, $\exists\, z_1' \in \mathbb{R}^2 \,/\, z_1 + z_1' = z_1' + z_1 = (0, 0)$. Ce symétrique est appelé opposé et est noté $-z_1$.
5. La loi + est commutative : $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$, $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
6. La loi $\times$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{R}^2$: si $z_1 \in \mathbb{R}^2$ et $z_2 \in \mathbb{R}^2$ alors $z_1 \times z_2 \in \mathbb{R}^2$.
7. La loi $\times$ est associative : $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}^2$, $z_1 \times (z_2 \times z_3) = (z_1 \times z_2) \times z_3$.
8. La loi $\times$ admet un élément neutre (unique) : $\forall z_1 \in \mathbb{R}^2$, $z_1 \times (1, 0) = (1, 0) \times z_1 = z_1$.
9. La loi $\times$ est distributive par rapport à la loi + : $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}^2$, $z_1 \times (z_2 + z_3) = z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3$ et $(z_1 + z_2) \times z_3 = z_1 \times z_3 + z_2 \times z_3$.
10. Tout élément de $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ admet un symétrique (unique) pour la loi $\times$: $\forall z_1 \in \mathbb{R}^2$, $\exists\, z_1' \in \mathbb{R}^2 \,/\, z_1 \times z_1' = z_1' \times z_1 = 1$. Ce symétrique est appelé inverse et est noté z_1^{-1} ou $\frac{1}{z_1}$.
11. La loi $\times$ est commutative : $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$, $z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$.

Remarques 2.2

- On a : $(0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0)$.
- On peut identifier les réels x de $\mathbb{R}$ aux éléments $(x, 0)$ de $\mathbb{R}^2$. On vérifie rapidement que $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$ et que $(x, 0) \times (y, 0) = (x \times y, 0)$. Les lois + et $\times$ que l'on vient de définir sur $\mathbb{R}^2$ peuvent donc être considérer comme des extensions de celles que l'on connaît sur $\mathbb{R}$. On va donc, de la même façon que dans $\mathbb{R}$, noter $z_1 \times z_2$ par $z_1.z_2$ ou encore $z_1 z_2$.
- On note i l'élément $(0, 1)$. On a, d'après les deux points précédents, $i^2 = i \times i = -1$.
- Pour tout réel a et tout couple de réels (x, y), on a :
  $a(x, y) = (a, 0)(x, y) = (ax, ay)$ et $a + (x, y) = (a, 0) + (x, y) = (a + x, y)$.
- Pour tout couple (a, b) de réels , on a : $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + b(0, 1) = a + bi = a + ib$.

S'il n'y avait pas la construction précédente et en simplifiant un peu les choses, on pourrait utiliser comme définition des complexes la suivante :

Définition 2.3

Soit i un terme qui vérifie $i^2 = -1$. En supposant que les lois + et $\times$ ont les mêmes propriétés sur $\mathbb{R} \cup \{i\}$ que sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des éléments de la forme $a + ib$ où a et b sont des réels est appelé ensemble des nombres complexes et est noté $\mathbb{C}$.

Remarques 2.4

- On a donc $\mathbb{C} = \{a + ib \text{ où } a, b \in \mathbb{R}\}$ et $z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \exists\, x, y \in \mathbb{R} \,/\, z = x + iy$.
- On a $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $x = x + i0$ et donc $x \in \mathbb{C}$.
- Un complexe de la forme ib où $b \in \mathbb{R}$ est appelé un imaginaire pur.

Définition 2.5

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux complexes avec $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$.
Les lois + et $\times$ sont définies par : $z + z' = (a + a') + i(b + b')$ et $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$.

Remarque 2.6

Ce sont les règles classiques de calculs en particulier de la distribution.

Exemple 2.7

Remarques 2.8

- Les identités remarquables et la formule du binôme de Newton restent valables.
- L'inverse d'un complexe non nul $z = a + ib$ est $z^{-1} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$.

Propriétés 2.9

Soient a, b, c, d des réels.
$a + ib = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$.
$a + ib = c + id \Leftrightarrow a = c$ et $b = d$.

Exemples 2.10

Remarques 2.11

- L'écriture $z = a + ib$ d'un complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$ est donc unique et est appelée forme algébrique de z.
- Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, le réel a est appelé la partie réel du complexe z et est noté $Re(z)$. Le réel b est appelé la partie imaginaire du complexe z et est noté $Im(z)$.
- Dans la forme algébrique d'un nombre $z \in \mathbb{C}$, lorsque l'on écrit $z = a + ib$, les nombres a et b doivent être dans $\mathbb{R}$.
  Ecrire $z = a + ib$ sans autre indication ne signifie ni que $a = Re(z)$ ni que $b = Im(z)$.
  Contre exemple : $z = (1 + i) + i(1 - i)$.
- Pour tout complexe z, on a $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = Re(z)$ et z imaginaire pur $\Leftrightarrow z = Im(z)i$.
- Deux nombres complexes opposés ont des carrés égaux.

3 Conjugués et modules

Définition 3.1

Soit $z = a + ib$ un complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$.
On appelle conjugué de z et on note $\overline{z}$ le complexe $a - ib$.

Exemples 3.2

Remarques 3.3

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $2\,Re(z) = z + \overline{z}$ et $2\,Im(z)i = z - \overline{z}$

Propriétés 3.4

Soient z et z' deux nombres complexes, et $\overline{z}$ et $\overline{z'}$ leurs conjugués respectifs. On a :

(i) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

(ii) $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

(iii) $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$

On dit que $z \mapsto \overline{z}$ est un morphisme d'anneau.

Remarque 3.5

En particulier, on a $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Exemples 3.6

Définition 3.7

Soit $z = a + ib$ un complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$.
On appelle module de z et on note $|z|$ le nombre réel positif ou nul défini par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Exemples 3.8

Remarques 3.9

- Pour un réel, le module et la valeur absolue sont égaux.
- Si $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ alors $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.
- $|z| = |\overline{z}|$.
- L'inverse d'un complexe non nul $z = a + ib$ peut aussi s'écrire $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Propriétés 3.10

Soient z et z' deux complexes.

(i) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(ii) $|z.z'| = |z|.|z'|$

(iii) $|z^{-1}| = |z|^{-1}$

(iv) $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

(v) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

4 Equations de degré 2

Exemple 4.1

Définition 4.2

On appelle *racine carrée* d'un nombre complexe Z tout nombre complexe z tel que $z^2 = Z$.

Exemples 4.3

Remarque 4.4

Il est formellement interdit d'utiliser le sigle $\sqrt{\ }$ pour un nombre complexe (non réel positif).

Propriété 4.5

Tout nombre complexe possède deux racines carrées opposées l'une de l'autre.

Remarque 4.6

Comme dans les réels, $(-a)^2 = (-a) \times (-a) = a \times a = a^2$.

Exemples 4.7

Remarque 4.8

Remarque 4.9

Exemple 4.10

Propriété 4.11

Soient a, b et c trois nombres complexes.

(i) Si $b^2 - 4ac = 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une unique solution $x = -\dfrac{b}{2a}$.

(ii) Si $b^2 - 4ac \neq 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions $x_1 = \dfrac{-b - \delta}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \delta}{2a}$ où δ est une racine carrée de $b^2 - 4ac$ c'est-à-dire $\Delta = \delta^2$.

Exemples 4.12

5 Rappel de trigonométrie

Définition 5.1

Deux triangles sont dit *semblables* si les mesures de leurs angles sont les mêmes.

Remarque 5.2

Puisque la somme des angles d'un triangle vaut toujours π, on obient une définition équivalente en posant que deux triangles sont semblables si deux de leurs (trois) angles ont même mesure.

Exemple 5.3

Définition 5.4

Dans un repère orthornormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, le cercle de centre O et de rayon 1 est appelé *cercle trigonométrique*.

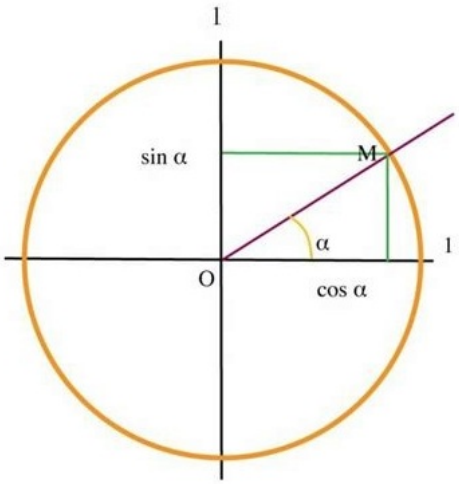
Propriété 5.5

Dans un repère orthornormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit M un point du cercle trigonométrique et α une mesure de l'angle orienté $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$.
Le cosinus de α est l'abscisse de M.
Le sinus de α est l'ordonnée de M.

Remarques 5.6

- D'après le théorème de Pythagore, on a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ pour tout angle x.
- Le tableau de valeurs suivant est à connaître.

x (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Cosinus (axe x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Sinus (axe y)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



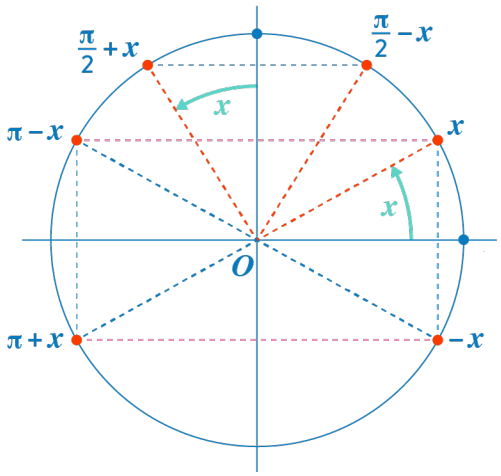
Propriété 5.7

Pour tout réel x, on a :

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$$

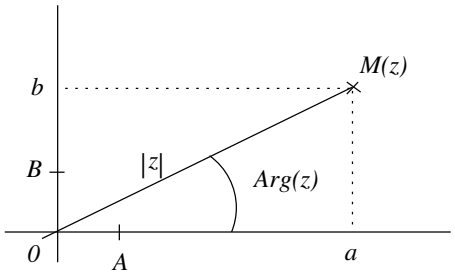
Remarque 5.8

Les formules de la propriété 5.7 se retrouvent grâce au cercle :



6 Le plan complexe

On considère le plan euclidien muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Le complexe $z = a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$ peut être représenté par le point $M(a, b)$.
On dit que M est l'image de z et que z est l'affixe de M. On note $M(z)$.
Le réel 1 a pour image $A(1, 0)$ et le complexe i a pour image $B(0, 1)$.
Les réels correspondent à l'axe des abscisses.
Les imaginaires purs correspondent à l'axe des ordonnées.



Remarques 6.1

- Si M est l'image de z et si M' est l'image de $\overline{z}$ alors M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
- D'après le théorème de Pythagore, on a $OM^2 = a^2 + b^2$ c'est-à-dire $OM = |z|$.

Définition 6.2

Soit z un complexe non nul et soit M son image dans un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. On appelle argument de z et on note $\arg(z)$ toute mesure (définie à $2k\pi$ près où $k \in \mathbb{Z}$) de l'angle $(\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{OM})$.

Notation

On note $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$ ou $\arg(z) \equiv \theta \bmod 2\pi$ pour exprimer le fait que $\arg(z) = \theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Propriétés 6.3

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,
z est réel si et seulement si $\arg(z) \equiv 0[\pi]$ et
z est imaginaire pur si et seulement si $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.
De plus, $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$.

Remarques 6.4

- On appelle argument principal d'un complexe la mesure de l'argument qui appartient à l'intervalle $]-\pi; \pi[$.
- Soit $z = a + ib$ un complexe où $a, b \in \mathbb{R}$. Notons r le module de z et θ son argument.
On a : $a = r.\cos\theta$ et $b = r.\sin\theta$ d'où $z = r.\cos\theta + ir.\sin\theta$
c'est-à-dire $z = r(\cos\theta + i.\sin\theta)$ que l'on appelle la notation trigonométrique de z.
- L'addition n'a aucun intérêt à être faite avec la notation trigonométrique.
- Soient $z = r(\cos\theta + i.\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i.\sin\theta')$, grâce aux formules de trigonométrie, on obtient $zz' = rr'(\cos(\theta + \theta') + i.\sin(\theta + \theta'))$.

Exemples 6.5

Propriétés 6.6

Si $z, z' \in \mathbb{C}^*$, alors $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$.

Remarques 6.7

- Si $z \neq 0$, puisque $z \times z^{-1} = 1$, en utilisant la propriété ci-dessus, on obtient :
$\arg(z^{-1}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$.
- On montre aussi que $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) \equiv n.\arg(z)[2\pi]$, pour $n \in \mathbb{Z}$ et $z \neq 0$.

Propriété 6.8

Pour tout complexe non nul $z = a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(\arg(z)) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ et } \sin(\arg(z)) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Exemples 6.9

7 Notation exponentielle

Définition 7.1

Pour tout réel α, on note $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$.

Remarque 7.2

$\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$.

Propriété 7.3

Tout nombre complexe z peut s'écrire sous la forme $\rho e^{i\theta}$ où $\rho = |z|$ et $\theta = \arg(z) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Cette écriture est appelée la *forme exponentielle* de z.

Exemples 7.4

Propriété 7.5

Si $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$ alors :
- $z^n = \rho^n e^{in\theta}$ pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$.
- $zz' = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$
- $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta-\theta')}$

Exemples 7.6

Définition 7.7

Soient a et b deux réels. On définit $e^{a+ib} = e^a \times e^{ib}$.

Propriété 7.8

Soient z et z' deux complexes et n un entier relatif. On a $e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$ et $e^{nz} = (e^z)^n$

Propriété 7.9

Formule de Moivre : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Propriété 7.10

Formules d'Euler : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.