Les nombres complexes

F. Wlazinski

Licence d'économie

1 Introduction

Remarque 1.1

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes a été introduit, entre autre, pour résoudre les équations de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif. Dans un premier temps, la notation $\sqrt{-1}$ a été utilisée pour l'une des deux solutions de l'équation $x^2 + 1 = 0$. Mais cette notation a montré ses limites et est source d'erreurs. D'où l'introduction du terme i qui vérifie $i^2 = -1$. Et il est strictement interdit d'utiliser le sigle $\sqrt{}$ pour un réel négatif ou pour un complexe non réel.
Il existe plusieurs méthodes pour construire l'ensemble $\mathbb{C}$. Une des plus classiques est celle qui suit. Toutefois, dans ce cours, nous allons plus nous intéresser aux propriétés du corps des complexes que de sa construction. Celle-ci est donc donnée à titre indicatif et permet de justifier la suite du cours. Il est quand-même à signaler que les propriétés et les remarques de cette partie seront à connaître car elles serviront régulièrement.

Construction de $\mathbb{C}$

On travaille sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ où l'on définit deux lois $+$ et $\times$ de la façon suivante :
$\forall (a, b), (a', b') \in \mathbb{R}^2$, $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$ et $(a, b) \times (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$.
(Faire attention car certains $+$ et $-$ sont ceux de $\mathbb{R}$).

$\mathbb{R}^2$ muni de ces deux lois possède une structure de corps commutatif c'est-à-dire vérifie les onze propriétés suivantes : (Par soucis de clarté et à fin de réutilisation car on pourra bientôt lire $\mathbb{C}$ à la place de $\mathbb{R}^2$, les éléments de $\mathbb{R}^2$ sont notés z à la place de (x, y).)

1. La loi $+$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{R}^2$: si $z_1 \in \mathbb{R}^2$ et $z_2 \in \mathbb{R}^2$ alors $z_1 + z_2 \in \mathbb{R}^2$.
2. La loi $+$ est associative : $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}^2$, $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$.
3. La loi $+$ admet un élément neutre (unique) : $\forall z_1 \in \mathbb{R}^2$, $z_1 + (0, 0) = (0, 0) + z_1 = z_1$.
4. Tout élément de $\mathbb{R}^2$ admet un symétrique (unique) pour la loi $+$: $\forall z_1 \in \mathbb{R}^2$, $\exists\, z'_1 \in \mathbb{R}^2 \,/\, z_1 + z'_1 = z'_1 + z_1 = (0, 0)$. Ce symétrique est appelé opposé et est noté $-z_1$.
5. La loi $+$ est commutative : $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$, $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
6. La loi $\times$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{R}^2$: si $z_1 \in \mathbb{R}^2$ et $z_2 \in \mathbb{R}^2$ alors $z_1 \times z_2 \in \mathbb{R}^2$.
7. La loi $\times$ est associative : $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}^2$, $z_1 \times (z_2 \times z_3) = (z_1 \times z_2) \times z_3$.
8. La loi $\times$ admet un élément neutre (unique) : $\forall z_1 \in \mathbb{R}^2$, $z_1 \times (1, 0) = (1, 0) \times z_1 = z_1$.
9. La loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $+$: $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}^2$, $z_1 \times (z_2 + z_3) = z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3$ et $(z_1 + z_2) \times z_3 = z_1 \times z_3 + z_2 \times z_3$.
10. Tout élément de $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ admet un symétrique (unique) pour la loi $\times$: $\forall z_1 \in \mathbb{R}^2, \exists\, z'_1 \in \mathbb{R}^2 \,/\, z_1 \times z'_1 = z'_1 \times z_1 = 1$. Ce symétrique est appelé inverse et est noté z_1^{-1} ou $\frac{1}{z_1}$.
11. La loi $\times$ est commutative : $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$, $z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$.

Remarques 1.2

- On a : $(0,1) \times (0,1) = (-1,0)$.
- On peut identifier les réels x de $\mathbb{R}$ aux éléments $(x,0)$ de $\mathbb{R}^2$. On vérifie rapidement que $(x,0) + (y,0) = (x+y,0)$ et que $(x,0) \times (y,0) = (x \times y, 0)$. Les lois $+$ et $\times$ que l'on vient de définir sur $\mathbb{R}^2$ peuvent donc être considérer comme des extensions de celles que l'on connaît sur $\mathbb{R}$. On va donc, de la même façon que dans $\mathbb{R}$, noter $z_1 \times z_2$ par $z_1.z_2$ ou encore $z_1 z_2$.
- On note i l'élément $(0,1)$. On a, d'après les deux points précédents, $i^2 = i \times i = -1$.
- Pour tout réel a et tout couple de réels (x,y), on a : $a(x,y) = (a,0)(x,y) = (ax, ay)$ et $a + (x,y) = (a,0) + (x,y) = (a+x, y)$.
- Pour tout couple (a,b) de réels , on a : $(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + b(0,1) = a + bi = a + ib$.

S'il n'y avait pas la construction précédente et en simplifiant un peu les choses, on pourrait utiliser comme définition des complexes la suivante :

Définition 1.3

Soit i un terme qui vérifie $i^2 = -1$. En supposant que les lois $+$ et $\times$ ont les mêmes propriétés sur $\mathbb{R} \cup \{i\}$ que sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des éléments de la forme $a + ib$ où a et b sont des réels est appelé ensemble des nombres complexes et est noté $\mathbb{C}$.

Remarques 1.4

- On a donc $\mathbb{C} = \{a + ib \text{ où } a, b \in \mathbb{R}\}$ et $z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \exists\, x, y \in \mathbb{R} \,/\, z = x + iy$.
- On a $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $x = x + i0$ et donc $x \in \mathbb{C}$.
- Un complexe de la forme ib où $b \in \mathbb{R}$ est appelé un imaginaire pur.

Définition 1.5

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux complexes avec $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$.
Les lois $+$ et $\times$ sont définies par : $z + z' = (a + a') + i(b + b')$ et $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$.

Remarques 1.6

- En utilisant les règles classiques de la distribution, on a : $z \times z' = (a + ib) \times (a' + ib') = aa' + aib' + iba' + ibib' = aa' - bb' + (ab' + ba')i$ et l'on retrouve la même définition pour la multiplication que dans la construction de $\mathbb{C}$.
- Les identités remarquables et la formule du binôme de Newton restent valables.
- L'inverse d'un complexe non nul $z = a + ib$ est $z^{-1} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$ (on vérifie facilement que $z \times z^{-1} = 1$).

Exemple 1.7

2 Conjugués et modules

Propriétés 2.1

Soient a, b, c, d des réels.
$a + ib = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$.
$a + ib = c + id \Leftrightarrow a = c$ et $b = d$.

Exemple 2.2

Remarques 2.3

- L'écriture $z = a + ib$ d'un complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$ est donc unique et est appelée forme algébrique de z.

- Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, le réel a est appelé la partie réel du complexe z et est noté $Re(z)$. Le réel b est appelé la partie imaginaire du complexe z et est noté $Im(z)$.
- Dans la forme algébrique d'un nombre $z \in \mathbb{C}$, lorsque l'on écrit $z = a + ib$, les nombres a et b doivent être dans $\mathbb{R}$.
  Ecrire $z = a + ib$ sans autre indication ne signifie ni que $a = Re(z)$ ni que $b = Im(z)$.
  Contre exemple : $z = (1 + i) + i(1 - i)$.
- Pour tout complexe z, on a $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = Re(z)$ et z imaginaire pur $\Leftrightarrow z = Im(z)i$.

Définition 2.4

Soit $z = a + ib$ un complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$.
On appelle conjugué de z et on note $\overline{z}$ le complexe $a - ib$.

Exemples 2.5

Remarques 2.6

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $2\,Re(z) = z + \overline{z}$ et $2\,Im(z)i = z - \overline{z}$

Propriétés 2.7

Soient z et z' deux nombres complexes, et $\overline{z}$ et $\overline{z'}$ leurs conjugués respectifs. On a :

(i) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

(ii) $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

(iii) $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$

On dit que $z \mapsto \overline{z}$ est un morphisme d'anneau.

Remarque 2.8

En particulier, on a $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Exemple 2.9

Définition 2.10

Soit $z = a + ib$ un complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$.
On appelle module de z et on note $|z|$ le nombre réel positif ou nul défini par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Exemples 2.11

Remarques 2.12

- Pour un réel, le module et la valeur absolue sont égaux.
- Si $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ alors $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.
- $|z| = |\overline{z}|$.
- L'inverse d'un complexe non nul $z = a + ib$ peut aussi s'écrire $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Propriétés 2.13

Soient z et z' deux complexes.

(i) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(ii) $|z.z'| = |z|.|z'|$

(iii) $|z^{-1}| = |z|^{-1}$

(iv) $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

(v) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

3 Equations de degré 2

Définition 3.1

On appelle *racine carrée* d'un nombre complexe Z tout nombre complexe z tel que $z^2 = Z$.

Exemples 3.2

Remarque 3.3

Il est formellement interdit d'utiliser le sigle $\sqrt{\ }$ pour un nombre complexe (non réel positif).

Propriété 3.4

Tout nombre complexe possède deux racines carrées opposées l'une de l'autre.

Remarque 3.5

Comme dans les réels, $(-a)^2 = (-a) \times (-a) = a \times a = a^2$.

Exemple 3.6

Propriété 3.7

Soient a, b et c trois nombres complexes.

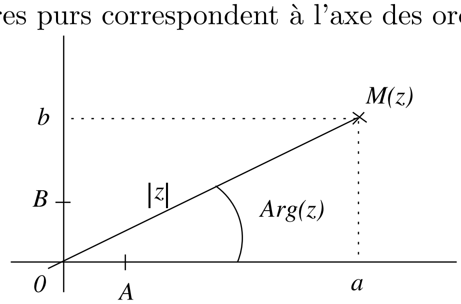
(i) Si $b^2 - 4ac = 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une unique solution $x = -\dfrac{b}{2a}$.

(ii) Si $b^2 - 4ac \neq 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions $x_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ où δ est une racine carrée de $b^2 - 4ac$ c'est-à-dire $\Delta = \delta^2$.

Exemples 3.8

4 Le plan complexe

On considère le plan euclidien muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.
Le complexe $z = a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$ peut être représenté par le point $M(a, b)$.
On dit que M est l'image de z et que z est l'affixe de M. On note $M(z)$.
Le réel 1 a pour image $A(1, 0)$ et le complexe i a pour image $B(0, 1)$.
Les réels correspondent à l'axe des abscisses.
Les imaginaires purs correspondent à l'axe des ordonnées.



Remarques 4.1

- Si M est l'image de z et si M' est l'image de $\overline{z}$ alors M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
- D'après le théorème de Pythagore, on a $OM^2 = a^2 + b^2$ c'est-à-dire $OM = |z|$.

Définition 4.2

Soit z un complexe <u>non nul</u> et soit M son image dans un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. On appelle argument de z et on note $\arg(z)$ toute mesure (définie à $2k\pi$ près où $k \in \mathbb{Z}$) de l'angle $(\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{OM})$.

Notation

On note $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$ ou $\arg(z) \equiv \theta \mod 2\pi$ pour exprimer le fait que $\arg(z) = \theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Propriétés 4.3

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,
z est réel si et seulement si$\arg(z) \equiv 0[\pi]$ et
z est imaginaire pur si et seulement si$\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.
De plus, $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$.

Remarques 4.4

- On appelle argument principal d'un complexe la mesure de l'argument qui appartient à l'intervalle $]-\pi;\pi[$.
- Soit $z = a + ib$ un complexe où $a, b \in \mathbb{R}$. Notons r le module de z et θ son argument.

On a : $a = r.\cos\theta$ et $b = r.\sin\theta$ d'où $z = r.\cos\theta + ir.\sin\theta$
c'est-à-dire $z = r(\cos\theta + i.\sin\theta)$ que l'on appelle la notation trigonométrique de z.

- L'addition n'a aucun intérêt à être faite avec la notation trigonométrique.
- Soient $z = r(\cos\theta + i.\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i.\sin\theta')$, grâce aux formules de trigonométrie, on obtient $zz' = rr'(\cos(\theta + \theta') + i.\sin(\theta + \theta'))$.

Exemples 4.5

Propriétés 4.6

Si $z, z' \in \mathbb{C}^*$, alors $\quad \arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$.

Remarques 4.7

- Si $z \neq 0$, Puisque $z \times z^{-1} = 1$, en utilisant la propriété ci-dessus, on obtient :
  $\arg(z^{-1}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$.
- On montre aussi que $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) \equiv n.\arg(z)[2\pi]$, pour $n \in \mathbb{Z}$ et $z \neq 0$.

Propriété 4.8

Pour tout complexe non nul $z = a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(\arg(z)) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin(\arg(z)) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Exemples 4.9

5 Notation exponentielle

Définition 5.1

Pour tout réel α, on note $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$.

Remarque 5.2

$\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$.

Propriété 5.3

Tout nombre complexe z peut s'écrire sous la forme $\rho e^{i\theta}$ où $\rho = |z|$ et $\theta = \arg(z) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.
Cette écriture est appelée la *forme exponentielle* de z.

Exemples 5.4

Propriété 5.5

Si $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$ alors :

- $z^n = \rho^n e^{in\theta}$ pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$.
- $zz' = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$
- $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta-\theta')}$

Exemples 5.6

Définition 5.7

Soient a et b deux réels. On définit $e^{a+ib} = e^a \times e^{ib}$.

Propriété 5.8

Soient z et z' deux complexes et n un entier relatif. On a $e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$ et $e^{nz} = (e^z)^n$

Propriété 5.9

Formule de Moivre : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Propriété 5.10

Formules d'Euler : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Exemples 5.11