Loi normale et approximation

F. Wlazinski

Licence d'économie

1 Loi normale

Définition 1.1

On dit qu'une v.a.r. X suit la loi *normale centrée réduite* et on note $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ si la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ est une densité de X .

Remarque 1.2

On admet que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$.

Propriété 1.3

La fonction de répartition φ d'une v.a.r. $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ vérifie $\varphi(-x) = 1 - \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Propriété 1.4

L'espérance d'une v.a.r. $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ est $E(X) = 0$ (centrée) et sa variance est $V(X) = 1$ (réduite).

Définition 1.5

Soient m un réel et σ un réel strictement positif.

On dit que X suit la loi *normale de paramètres* (m, σ^2) et, on note $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ ou $\mathcal{N}(m, \sigma)$, si la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$ est une densité de X .

Propriété 1.6

L'espérance d'une v.a.r. $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est $E(X) = m$ et sa variance est $V(X) = \sigma^2$.

Propriété 1.7

Si X suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ alors $\frac{X - \mu}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite c'est-à-dire $\frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Remarques 1.8

Exemple 1.9

2 Approximation par une loi normale

Rappel important : Pour une v.a.r. à densité X , on a **toujours** $P(X=x) = 0$ ce qui n'est pas le cas pour une v.a.r. discrète.

2.1 Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Principe

On estime que pour $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1 - p) \geq 5$, on peut approcher la loi $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi $\mathcal{N}(np, nP(1 - p))$.

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ peut être approchée par $Y \sim \mathcal{N}(np, nP(1 - p))$, on a $P(X=k) \approx P(k - 0,5 < Y < k + 0,5)$. On dit que l'on a fait une *correction de continuité*.

Remarques 2.1

Exemple 2.2

2.2 Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale

Principe

On estime que pour $\lambda \geq 18$ on peut approcher la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ par la loi $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$.
Tout comme pour la loi binomiale, on applique la correction de continuité.

Remarque 2.3

Exemple 2.4