Probabilités

F. Wlazinski

Licence d'économie

1 Expérience aléatoire

Définitions 1.1

Une *expérience aléatoire* est une expérience dont le résultat est soumis au hasard.
Un résultat possible est appelé une *éventualité* (ou une *issue*).
L'ensemble de tous les résultats possibles lors de cette expérience aléatoire est appelé l'*univers* de l'expérience et est noté Ω.
On appelle *événement* de cette expérience aléatoire tout sous-ensemble de Ω.

Remarques 1.2

Soit E un événement d'une expérience aléatoire d'univers Ω.

(i) Si $\text{card}(E) = 0$ i.e. $E = \varnothing$, on dit que E est un événement impossible.

(ii) Si $\text{card}(E) = 1$, on dit que E est un événement élémentaire.

(iii) Si $\text{card}(E) = \text{card}(\Omega)$ i.e. $E = \Omega$, on dit que E est un événement certain.

Exemple 1.3

Définition 1.4

Soient E et F deux événements d'une expérience aléatoire d'univers Ω.
L'ensemble $C_\Omega E = \overline{E}$ est appelé l'événement contraire de E.
Si E et F sont disjoints i.e. $E \cap F = \varnothing$, on dit que E et F sont incompatibles.

Remarques 1.5

Exemple 1.6

2 Probabilités

Définition 2.1

Une probabilité p sur un univers Ω est une application de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0; 1]$ telle que :

(i) La probabilité de l'événement certain est 1 i.e. $p(\Omega) = 1$.

(ii) La probabilité de la réunion d'événements deux à deux incompatibles est la somme des probabilités de ces événements i.e. $P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} p(A_i)$ si les A_i sont deux à deux disjoints.

On dit que (Ω, p) est un espace probabilisé.

Remarque 2.2

Dans le cas où l'univers Ω est fini, on obtient une probabilité p sur Ω en associant à chaque événement élémentaire est un nombre réel compris entre 0 et 1 et tel que la somme des probabilités de tous les événements élémentaires soit égale à 1.

Propriété 2.3

Soit (Ω, p) est un espace probabilisé et soient E et F deux événements de Ω. On a :

(i) $p(\varnothing) = 0$

(ii) $p\left(\overline{E}\right) = 1 - p(E)$

(iii) $p(E \cup F) = p(E) + p(F) - p(E \cap F)$

(iv) $E \subset F \;\Rightarrow\; p(E) \leq p(F)$

Remarque 2.4

Définition 2.5

Deux événements d'un espace probabilisé (Ω, p) qui ont la même probabilité sont dits équiprobables.

Définition 2.6

On dit qu'il y a équiprobabilité sur un univers **fini** si et seulement sitous les événements élémentaires sont équiprobables.

Propriété 2.7

S'il y a équiprobabilité sur un espace probabilisé (Ω, p) alors la probabilité d'un événement E est : $p(E) = \dfrac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)}$.

Remarque 2.8

Exemple 2.9

3 Probabilités conditionnelles

Définition 3.1

Soit (Ω, p) un espace probabilisé et soit B un événement tel que $p(B) \neq 0$.
Pour tout événement A, on appelle probabilité (*conditionnelle*) de A sachant B, la probabilité que A soit réalisé sachant que B l'est. On la notera $p(A)_{|B}$.

Propriété 3.2

Soit (Ω, p) un espace probabilisé et soit B un événement tel que $p(B) \neq 0$.
Pour tout événement A, on a $p(A)_{|B} = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$ et donc $p(A \cap B) = p(A)_{|B} \times p(B)$.

Remarque 3.3

Exemple 3.4

Exemple 3.5

On tire simultanément et avec équiprobabité 2 jetons au hasard parmi 9 jetons numérotés de 1 à 9. Sachant que la somme des valeurs des jetons est paire, quelle est la probabilité que les deux valeurs soit impaires?

Définition 3.6

On dit qu'une famille $(B_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements d'un espace probabilisé (Ω, p) si et seulement siles $(B_i)_{i\in I}$ forment une partition de Ω c'est-à-dire :

(i) $\forall i \in I,\ B_i \neq \emptyset$

(ii) $\forall i, j \in I,\ i \neq j$, on a $B_i \cap B_j = \emptyset$

(iii) $\displaystyle\bigcup_{i\in I} B_i = \Omega$

Exemple 3.7

On étudie la couleur des cheveux et celle des yeux d'un groupe d'étudiants. Les résultats sont donnés par le tableau suivant :

yeux / cheveux	marrons	bleus
bruns	12	2
châtains	3	3
blonds	1	5
roux	1	2

On choisit un étudiant au hasard et on considère les événements suivants :
B_1 : "il ou elle a les cheveux bruns"
B_2 : "il ou elle a les cheveux châtains"
B_3 : "il ou elle a les cheveux blonds"
B_4 : "il ou elle a les cheveux roux"

Propriété 3.8

Soit (Ω, p) est un espace probabilisé, soit A un événement de Ω et soit $(B_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements de Ω.
On a $p(A) = \displaystyle\sum_{i\in I} p(A \cap B_i) = \sum_{i\in I} p(A)_{|B_i} \times p(B_i)$.

Exemple 3.9

Remarque 3.10

Définition 3.11

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé (Ω, p).
On dit que A et B sont indépendants si la réalisation de l'un des événements n'a aucune influence sur la réalisation de l'autre. Autrement dit, si $p(A) = p(A)_{|B}$ et $p(B) = p(B)_{|A}$.

Exemple 3.12

Remarque 3.13

Propriété 3.14

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé (Ω, p).
A et B indépendants $\Leftrightarrow$ $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Remarque 3.15

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé (Ω, p).
Puisque $p(B)_{|A} = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{p(B) \times p(A)_{|B}}{p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})}$, on obtient :
$p(B)_{|A} = \dfrac{p(B) \times p(A)_{|B}}{p(B) \times p(A)_{|B} + p(\overline{B}) \times p(A)_{|\overline{B}}}$.