Université de Picardie Jules Verne

UFR d'économie et de gestion

Mathématiques

Licence 1 - Semestre 1

Exercices d'entrainement **Feuille 2** **Corrigés**

Correction 1

(a) $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 4 \times (-2) = 49 + 32 = 81 = 9^2$

$$x_1 = \frac{-(-7) - 9}{2 \times 4} = -\frac{1}{4}$$

$$x_2 = \frac{-(-7) + 9}{2 \times 4} = 2$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{4} ; 2 \right\}$$

(b) $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 9 \times 1 = 36 - 36 = 0$

$$x_0 = \frac{-(-6)}{2 \times 9} = \frac{1}{3}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

(c) $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 7 = 25 - 28 = -3$

$S = \emptyset$

Correction 2

(a) $\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49 = 7^2$

$$x_1 = \frac{-5 - 7}{2 \times 2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-5 + 7}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$$

$$P_1 = 2 \times (x - (-3)) \times \left(x - \frac{1}{2} \right) = (x + 3)(2x - 1)$$

(b) $\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times (3) = 4 + 12 = 16 = 4^2$

$$x_1 = \frac{-2 - 4}{2 \times (-1)} = 3$$

$$x_2 = \frac{-2 + 4}{2 \times (-1)} = -1$$

$$P_2 = -1 \times (x - 3) \times (x - (-1)) = (3 - x)(x + 1)$$

(c) $\Delta = 4^2 - 4 \times 4 \times 1 = 16 - 16 = 0$

$x_0 = \dfrac{-4}{2 \times 4} = -\dfrac{1}{2}$

$P_3 = 4\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 2^2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = (2x+1)^2$

Correction 3

(a) $\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times 4 = 25 - 32 = -7$

$S = \mathbb{R}$

(b) $\Delta = 6^2 - 4 \times (-1) \times (-10) = 36 - 40 = -4$

$S = \emptyset$

(c) $\Delta = 6^2 - 4 \times 1 \times 9 = 36 - 36 = 0$

$S = \mathbb{R}$

(d) $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 16 - 16 = 0$

$x_0 = \dfrac{-(-4)}{2 \times 4} = \dfrac{1}{2}$

$S = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

(e) $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25 = 5^2$

$x_1 = \dfrac{-3-5}{2 \times 2} = -2$

$x_2 = \dfrac{-3+5}{2 \times 2} = \dfrac{1}{2}$

$S = \left]-\infty; -2\right] \cup \left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$

(f) $\Delta = (-11)^2 - 4 \times (-3) \times 4 = 121 + 48 = 169 = 13^2$

$x_1 = \dfrac{-(-11) - 13}{2 \times (-3)} = \dfrac{1}{3}$

$x_2 = \dfrac{-(-11) + 13}{2 \times (-3)} = -4$

$S = \left]-4; \dfrac{1}{3}\right[$

Correction 4

1. On pose $X = \sqrt{x}$.

   L'équation devient $X^2 - 6X + 8 = 0$.

   $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 36 - 32 = 4 = 2^2$

$X_1 = \dfrac{6-2}{2} = 2$ et $X_2 = \dfrac{6+2}{2} = 4$

D'où $\sqrt{x} = 2$ ou $\sqrt{x} = 4$

C'est-à-dire $x = 4$ ou $x = 16$.

$S = \{4; 16\}$

2. D'après la première question et d'après la propriété sur le signe d'un polynôme du second degré, on a : $X^2 - 6X + 8 \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq X \leq 4$.

   Et donc $2 \leq \sqrt{x} \leq 4$.

   Ce qui est équivalent à $4 \leq x \leq 16$.

   $S = [4; 16]$

Correction 5

1. On pose $X = x^3$.
   L'équation devient $X^2 - 7X - 8 = 0$.

   $\Delta = (-7)^2 + 4 \times 1 \times (-8) = 49 + 32 = 81 = 9^2$

   $X_1 = \dfrac{7-9}{2} = -1$ et $X_2 = \dfrac{7+9}{2} = 8$

   D'où $x^3 = -1$ ou $x^3 = 8$

   C'est-à-dire $x = -1$ ou $x = 2$.

   $S = \{-1; 2\}$

2. D'après la première question et d'après la propriété sur le signe d'un polynôme du second degré, on a : $X^2 - 7X - 8 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq X \leq 8$.

   Et donc $-1 \leq x^3 \leq 8$.

   Ce qui est équivalent à $-1 \leq x \leq 2$.

   $S = [-1; 2]$

Correction 6

1. On pose $X = x^2$.
   L'équation devient $X^2 + 5X - 36 = 0$.
   $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times (-36) = 25 + 144 = 169 = 13^2$

   $X_1 = \dfrac{-5-13}{2} = -9 < 0$ ne convient pas car $X = x^2 \geq 0$.

   $X_2 = \dfrac{-5+13}{2} = 4$

D'où $x^2 = 4$ et $x = -2$ ou $x = 2$.

$S = \{-2; 2\}$

$$\begin{aligned} x^4 + 5x^2 - 36 &= X^2 + 5X - 36 \\ &= (X - (-9))(X - 4) = (X + 9)(X - 4) \\ &= (x^2 + 9)(x^2 - 4) \\ &= (x^2 + 9)(x - 2)(x + 2) \end{aligned}$$

On doit résoudre $(x^2 + 9)(x - 2)(x + 2) \leq 0$ avec :

$x^2 + 9 > 0$

$x - 2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq 2$

$x + 2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq -2$

Et on remplit le tableau :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x^2 + 9$		$+$		$+$		$+$	
$x + 2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x^4 + 5x^2 - 36$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où $S = [-2; 2]$.

Correction 7

1. La personne a acheté $\dfrac{594}{p}$ dollars.

   Si le dollar avait été plus cher, elle en aurait acheté $\dfrac{594}{p + 0,03}$.

   Nous avons $\dfrac{594}{p + 0,03} = \dfrac{594}{p} - 10$.

   $$\Leftrightarrow\; \frac{594}{p + 0,03} \times p(p + 0,03) = \left(\frac{594}{p} - 10\right) \times p(p + 0,03)$$

   $$\Leftrightarrow\; 594p = 594(p + 0,03) - 10p(p + 0,03)$$

   $$\Leftrightarrow\; 0 = 17,82 - 10p^2 - 0,3p$$

   $$\Leftrightarrow\; 10p^2 + 0,3p - 17,82 = 0$$

   $\Delta = 0,3^2 - 4 \times 10 \times (-17,82) = 712,89 = 26,7^2$

   $p_1 = \dfrac{-0,3 - 26,7}{20} < 0$ qui ne convient pas et donc $p = p_2 = \dfrac{-0,3 + 26,7}{20} = 1,32$

2. Premier achat : $\dfrac{594}{1,32} = 450$

   Second achat : $\dfrac{594}{1,35} = 440 (= 450 - 10)$

   Taux moyen : $\dfrac{594+594}{450+440} = \dfrac{1188}{890} \sim 1,3348$

Correction 8

1. $A(2) = -(2)^3 + 6(2)^2 - 11(2) + 6$
   $= -8 + 24 - 22 + 6 = 0$

   Le réel 2 est une racine de A. On peut donc mettre $x-2$ en facteur dans $A(x)$.

2. (a) Soient a, b et c les réels tels que $A(x) = (x-2)(ax^2+bx+c)$. On développe et on ordonne l'expression.

   $A(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c$
   $= ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$

   Puis on identifie les coefficients : $\begin{cases} a = -1 \\ b - 2a = 6 \\ c - 2b = -11 \\ -2c = 6 \end{cases}$.

   On obtient : $\begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = -3 \end{cases}$.

   Ce qui signifie que $A(x) = (x-2)(-x^2+4x-3)$.

   (b) On pose la division :

$$\begin{array}{rrrrrrr|rrrrrrr}
-x^3 & + & 6x^2 & - & 11x & + & 6 & x & - & 2 & & & & \\ \cline{8-14}
-x^3 & + & 2x^2 & & & & & -x^2 & + & 4x & - & 3 & & \\
 & & 4x^2 & - & 11x & + & 6 & & & & & & & \\
 & & 4x^2 & - & 8x & & & & & & & & & \\
 & & & & -3x & + & 6 & & & & & & & \\
 & & & & -3x & + & 6 & & & & & & & \\
 & & & & & & 0 & & & & & & &
\end{array}$$

   (c) On remplit le tableau :

	-1	6	-11	6
2		-2	8	-6
	1	4	-3	0

   (d) $-x^3 + 6x^2 - 11x + 6 = 0$

   $\Leftrightarrow\ (x-2)(-x^2+4x-3) = 0$

   $\Leftrightarrow\ x - 2 = 0$ ou $-x^2 + 4x - 3 = 0$

$$\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-3) = 4 = 2^2$$

$$x_1 = \frac{-4-2}{-2} = 3 \quad x_2 = \frac{-4+2}{-2} = 1$$

$\Leftrightarrow\ x = 2$ ou $x = 3$ ou $x = 1$

$S = \{1; 2; 3\}$

Cela signifie que $A(x) = -(x-1)(x-2)(x-3)$.

(e) $A(x) < 0 \ \Leftrightarrow\ (x-1)(x-2)(x-3) > 0$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)(x-2)(x-3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$S = \ ]1; 2[\ \cup \ ]3; +\infty[$