Université de Picardie Jules Verne

UFR d'économie et de gestion

Mathématiques

Licence 1 - Semestre 1

Exercices d'entrainement **Feuille 3** **Corrigés**

Correction 1

a. Puisque $x_A \neq x_B$, la droite (AB) admet une équation réduite $y = mx + p$. avec $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{5-2}{2-1} = 3$ et $p = y_A - mx_A = 2 - 3 = -1$ soit $y = 3x - 1$.

b. Puisque $x_A = x_B$, la droite (AB) a pour équation $x = 2$.

c. Puisque $x_A \neq x_B$, la droite (AB) admet une équation réduite $y = mx + p$. avec $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-2-(-2)}{7-1} = 0$ et $p = y_A - mx_A = -2$ soit $y = -2$.
Bien entendu, on aurait pu remarquer que les ordonnées des deux points étaient les mêmes et conclure directement.

Correction 2

1. $P(x) = ax + b$ avec a et b tels que $P(2005) = 2005a + b = 2,5$ et $P(2004) = 2004a + b = 2,65$. D'où $a = -0,15$ et $b = 303,25$. Donc $P(x) = -0,15x + 303,25$.

2. $P(2000) = -0,15 \times 2000 + 303,25 = 3,25$ soit 3250 habitants en 2000.

3. En 2010, $P(2010) = 1,75$ soit 1750 habitants. En 2011, il y en aura en principe 1950 et la fonction population étant affine, on a en notant la nouvelle fonction population Q, $Q(x) = ax + b$ avec a et b tels que $Q(2010) = 1,75 = 2010a + b$ et $Q(2011) = 1,95 = 2011a + b$ d'où $a = 0,2$ et $b = -400,25$. Donc $Q(x) = 0,2x - 400,25$. Puisque $Q(2020) = 3,75$, la population en 2020 sera de 3750 habitants.

Correction 3

(a) Le déterminant du système est $D = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 4 \times (-2) - 3 \times (-3) = 1$.

Puisque $D \neq 0$, les solutions sont donc :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{2 \times (-2) - 3 \times (-3)}{1} = 5 \text{ et } y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{D} = \frac{12-6}{1} = 6.$$

Donc $S = \{(5;6)\}$.

(b) Le déterminant du système est $D = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 2 \times 12 - 3 \times 8 = 24 - 24 = 0.$

On a $D_x = \begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 108 - 40 = 68 \neq 0$ donc $S = \emptyset$.

(c) Le déterminant du système est $D = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 3 \times (-8) - 4 \times (-6) = -24 + 24 = 0.$

De plus, $D_x = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 0$ et $D_y = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - 4 \times 3 = 0.$

Cela signifie que les équations sont proportionnelles.

On remarque que $3x - 6y = 3 \;\Leftrightarrow\; x - 2y = 1 \;\Leftrightarrow\; 4x - 8y = 4.$

Donc $x = 1 + 2y$

Autrement dit, $S = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x = 1 + 2y\}$ c'est-à-dire $S = \{(1 + 2y; y) \text{ où } y \in \mathbb{R}\}$

Correction 4

On remplace la deuxième équation par la somme d'elle-même et de la première équation afin d'éliminer la variable x.
Dans la même idée, on remplace la troisième équation par la somme d'elle-même et du double de la deuxième équation.

Cela se note : $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & & & = & 2 \\ -x & - & y & + & z & = & -3 \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & 4 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{array}$

On obtient : $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & & & = & 2 \\ & & & & z & = & -1 \\ & & y & + & 4z & = & -2 \end{array}\right.$

Puis en remplaçant succéssivement z et y par leur valeur : $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 0 \\ z & = & -1 \\ y & = & 2 \end{array}\right.$

D'où $S = \{(0; -1; 2)\}$.

Correction 5

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y + z & = & 4 \\ -2x - y + z & = & -8 \\ 3x - y + 3z & = & 5 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y + z & = & 4 \\ 3y + 3z & = & 0 \\ -7y & = & -7 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3 \\ y & = & 1 \\ z & = & -1 \end{array}\right.$$

donc $S = \{(3; 1; -1)\}$

Correction 6

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x + y - 3z & = & 1 \\ 3x - 2y + z & = & 4 \\ x - 3y + 4z & = & 3 \end{array}\right. \qquad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-3y+4z &=& 3 \\ 3x-2y+z &=& 4 \\ 2x+y-3z &=& 1 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-3y+4z &=& 3 \\ 7y-11z &=& -5 \\ 7y-11z &=& -5 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-3y+4z &=& 3 \\ 7y-11z &=& -5 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3y-4z+3 \\ y &=& \dfrac{11z-5}{7} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3\times\dfrac{11z-5}{7}-\dfrac{28z}{7}+\dfrac{21}{7}=\dfrac{5z+6}{7} \\ y &=& \dfrac{11z-5}{7} \end{array}\right.$$

$$S=\left\{\left(\frac{5z+6}{7};\frac{11z-5}{7};z\right) \text{ où } z\in\mathbb{R}\right\}$$

Correction 7

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z+t &=& 3 \\ 2x+5y+z-2t &=& 5 \\ 3x-4y-z+t &=& -1 \\ x+3y+2z-3t &=& 3 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z+t &=& 3 \\ y+3z-4t &=& -1 \\ -10y+2z-2t &=& -10 \\ y+3z-4t &=& 0 \end{array}\right.$$

Puisque les équations (2) et (4) sont incompatibles, il n'y a pas de solution c'est-à-dire $S=\emptyset$.