Université de Picardie Jules Verne

UFR d'économie et de gestion

Mathématiques

Licence 1 - Semestre 1

Exercices d'entrainement **Feuille 4** **Corrigés**

Correction 1

Cette équation est définie si $x+1>0$, $x+3>0$ et $x+7>0$ c'est-à-dire $x>-1$, $x>-3$ et $x>-7$ donc finalement $x>-1$ donc sur $D_e =]-1,+\infty[$.
On obtient que, pour tout x de D_e, $\ln[(x+1)(x+3)] = \ln(x+7)$. Comme la fonction ln est bijective, cela signifie que $(x+1)(x+3) = (x+7)$ donc $x^2+4x+3 = x+7$ soit $x^2+3x-4=0$.
On a $\Delta = 9+16 = 25 = 5^2$ et les racines sont $x_1 = \dfrac{-3-5}{2} = -4$ et $x_2 = \dfrac{-3+5}{2} = 1$.
Comme $x_1 \notin D_e$, la seule solution possible est x_2 c'est-à-dire $\mathcal{S} = \{1\}$.

Correction 2

Cette équation est définie si $x^2+4x+3>0$ et $x+7>0$.
On a $x+7>0 \;\Leftrightarrow\; x>-7$.
En ce qui concerne, x^2+4x+3, on a $\Delta = 4^2 - 4\times 1\times 3 = 4 = 2^2$.
Il s'en suit que $x_1 = \dfrac{-4-2}{2} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-4+2}{2} = -1$.
Donc $x^2+4x+3>0 \;\Leftrightarrow\; x<-3$ ou $x>-1$.
Donc finalement l'équation est définie sur $D_e =]-7,-3[\cup]-1,+\infty[$.
Pour tout x de D_e, on a $\ln(x^2+4x+3) = \ln(x+7)$.
Comme la fonction ln est bijective, on obtient que, pour tout x de D_e, $x^2+4x+3 = x+7$ soit $x^2+3x-4=0$.
$\Delta = 9+16 = 25 = 5^2$ et les racines sont $x_1 = \dfrac{-3-5}{2} = -4$ et $x_2 = \dfrac{-3+5}{2} = 1$.
D'où $\mathcal{S} = \{-4,1\}$.

Correction 3

La fraction $\dfrac{x+1}{3x-5}$ a le même signe que $(x+1)(3x-5)$ qui a pour racines $x_1=-1$ et $x_2 = \dfrac{5}{3}$.
L'ensemble de définition de l'inéquation est $]-\infty;-1[\;\cup\;\left]\dfrac{5}{3};+\infty\right[$.

Plus précisément :

- Sur $\left]\dfrac{5}{3};+\infty\right[$, on a $x+1>0$ et $3x-5>0$.

De plus, $\ln\left(\dfrac{x+1}{3x-5}\right) \geq 0 = \ln 1 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{x+1}{3x-5} \geq 1 \;\Leftrightarrow\; x+1 \geq 3x-5 \;\Leftrightarrow\; 2x \leq 6 \;\Leftrightarrow\; x \leq 3$.
Les solutions sur $\left]\dfrac{5}{3};+\infty\right[$ sont dans l'intervalle $\left]\dfrac{5}{3};3\right]$.

- Sur $]-\infty;-1[$, on a $x+1<0$ et $3x-5<0$.

Mais $\dfrac{x+1}{3x-5}=\dfrac{-x-1}{5-3x}$ avec $-x-1>0$ et $5-3x>0$.
De plus, $\ln\left(\dfrac{-x-1}{5-3x}\right)\geq 0=\ln 1 \ \Leftrightarrow\ \dfrac{-x-1}{5-3x}\geq 1\ \Leftrightarrow\ -x-1\geq 5-3x$
$\Leftrightarrow\ 2x\geq 6\ \Leftrightarrow\ x\geq 3$ donc il n'y a pas de solution sur $]-\infty,-1[$.
D'où $\mathcal{S}=\left]\dfrac{5}{3};3\right]$.

Correction 4

Il faut que $x>0$ et que $y>0$.
On peut remarquer que x et y sont interchangeables.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 30 \\ \ln x+\ln y & = & 3\ln 6 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 30 \\ \ln(xy) & = & \ln 6^3 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 30 \\ xy & = & 216 \end{array}\right.$$

Rappel : Si $a+b=s$ et $ab=p$ alors a et b sont les solutions de l'équation $X^2-sX+p=0$.
x et y sont les solutions de l'équation $X^2-30X+216=0$.
$\Delta=900-864=36=6^2$
$x_1=\dfrac{30-6}{2}=12$ et $x_2=\dfrac{30+6}{2}=18$
On a $(x,y)=(x_1,x_2)$ ou $(x,y)=(x_2,x_1)$.
$\mathcal{S}=\{(12;18);(18;12)\}$.

Correction 5

On doit avoir $x>0$ et $x\neq 1$.
On pose $X=(\ln x)^2$ d'où $X>0$ et $X-\dfrac{72}{X}=1$ c'est-à-dire $X^2-X-72=0$.
On a $\Delta=1+288=289=17^2$ et les racines sont $X_1=\dfrac{1-17}{2}=-8$ et $X_2=\dfrac{1+17}{2}=9$.
Puisque $X>0$, la seule racine possible est donc $X_2=9=(\ln x)^2$. On en déduit que : $\ln(x)=-3$ ou $\ln(x)=3$ soit $x=e^{-3}$ ou $x=e^3$.
On a donc $\mathcal{S}=\{e^{-3};e^3\}$.

Correction 6

Il faut que $x>0$ et $y>0$.
Dans ce cas, le système devient $\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & 218 \\ \ln(xy) & = & \ln 91 \end{array}\right.$.
Soit $\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & 218 \\ xy & = & 91 \end{array}\right.$.
Indication : $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$.
Rappel : Si $a+b=s$ et $ab=p$ alors a et b sont les solutions de l'équation $X^2-sX+p=0$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & 218 \\ xy & = & 91 \end{array}\right. \qquad L_1\leftarrow L_1+2L_2$$
$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2+2xy & = & 400 \\ xy & = & 91 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl}(x+y)^2 & = & 20^2\\ xy & = & 91\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl}x+y & = & -20\\ xy & = & 91\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{lcl}x+y & = & 20\\ xy & = & 91\end{array}\right.$$

Comme $x > 0$ et $y > 0$, on ne peut pas avoir $x + y = -20$.
Donc x et y sont les solutions de l'équation : $X^2 - 20X + 91 = 0$.
$\Delta = 20^2 - 4 \times 1 \times 91 = 36 = 6^2$.
Les racines sont : $X_1 = \dfrac{20-6}{2} = 7$ et $X_2 = \dfrac{20+6}{2} = 13$.
Comme x et y jouent le même rôle, on a soit $(x, y) = (7, 13)$ soit $(x, y) = (13, 7)$.
Pour finir, $\mathcal{S} = \{(7, 13); (13, 7)\}$.

Correction 7

(i) $\log_a(b) \times \log_b(c) \times \log_c(d) \times \log_d(a) = \dfrac{\ln b}{\ln a} \times \dfrac{\ln c}{\ln b} \times \dfrac{\ln d}{\ln c} \times \dfrac{\ln a}{\ln d} = 1$

(ii) $\log_{1/5}(1/8) = \dfrac{\ln(1/8)}{\ln(1/5)} = \dfrac{-\ln 8}{-\ln 5} = \dfrac{\ln 8}{\ln 5} = \ln_5(8)$.

Correction 8

(a) $A = \ln e^3 - \ln e^2 = 3 \ln e - 2 \ln e = 3 - 2 = 1$

(b) $B = \ln \sqrt{e} + \ln \dfrac{1}{e} = \dfrac{1}{2} \ln e - \ln e = -\dfrac{1}{2}$.

(c) $C = 5 \ln e^{-1} + 4 \ln(e^2 \sqrt{e}) = -5 \ln e + 4 \ln e^{5/2} = -5 + 10 = 5$.

Correction 9

1. Il faut que $|7 - 2x| > 0$ c'est-à-dire $7 - 2x \neq 0$ et donc $x \neq \dfrac{7}{2}$.

   Donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{7}{2}\right\}$ et f est dérivable sur D_f.

   De plus, pour tout x de D_f, on a : $f'(x) = \dfrac{-2}{7-2x} = \dfrac{2}{2x-7}$.

2. Il faut que $x > 0$ et $\ln x > 0$ soit $x > 0$ et $x > 1$.

   Donc $D_f =]1; +\infty[$ et f est dérivable sur D_f.

   De plus, pour tout x de D_f, on a : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \dfrac{1}{x \ln x}$.

3. Il faut que $x > 0$.

   Donc $D_f =]0; +\infty[$ et f dérivable sur D_f.

   De plus, pour tout x de D_f, on a : $f'(x) = \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x)$.

4. Puisque $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$, ce qui implique que $x^2 - x + 1$ est toujours strictement positif. On a donc $D_f = \mathbb{R}$.

   f est dérivable sur D_f et, pour tout x de D_f, on a : $f'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$.

Correction 10

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \ln'(1) = \dfrac{1}{1} = 1.$

2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x^3}{x-1} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3\ln x}{x} = 0$

3. $\lim\limits_{x\to +\infty} x - \ln(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$

Correction 11

Il faut que $x > 0$. Donc $D_f =]0; +\infty[$.
La fonction f est dérivable sur D_f et, $\forall x \in D_f$
$f'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x + \dfrac{1}{x} - 2 = \dfrac{2\ln x + 1 - 2x}{x}$.
On sait que $\ln x \leq x - 1$.
Donc $2\ln x + 1 \leq 2x - 1$ et $2\ln x + 1 - 2x \leq -1 < 0$.
On en déduit que $f'(x) < 0$ pour tout $x \in D_f$. Donc f est décroissante sur D_f.
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} -2x = -\infty$.
$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-2x}{x} = -2$.
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) + 2x = \lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x)^2 + \ln x = +\infty$.
Donc la courbe représentative de f admet une branche parabolique dans la direction de la droite d'équation $y = -2x$.
On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} (\ln x)^2 = +\infty$.
Mais $f(x) = (\ln x) \times (\ln x + 1) - 2x$. D'où $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.
Donc la courbe représentative de f admet la droite d'équation $x = 0$ comme assymptote.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	
$f(x)$	$\|$	$+\infty$ $\searrow$	$-\infty$

Correction 12

(i) *Ensemble de définition et continuité*

Il faut que $x^2 - 2x + 2 > 0$

On a $\Delta = 4 - 4 \times 2 = -4 < 0$ donc $x^2 - 2x + 2$ est toujours strictement positif.

D'où $D_f = \mathbb{R}$.

De plus, f est continue sur D_f.

(ii) *Variations*

La fonction f est dérivable sur D_f et $f'(x) = \dfrac{2x-2}{x^2-2x+2}$.

De plus, $f'(x)$ est du signe de $2x-2$ c'est-à-dire positive si et seulement si $x \geq 1$.

Donc f est décroissante sur $]-\infty; 1[$ et croissante sur $]1; +\infty[$.

(iii) *Limites aux bornes et comportement asymptotique*

On a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2-2x+2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\ln(x^2)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} 2\dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique dans la direction (Ox) en $-\infty$ et en $+\infty$.

(iv) *Convexité*

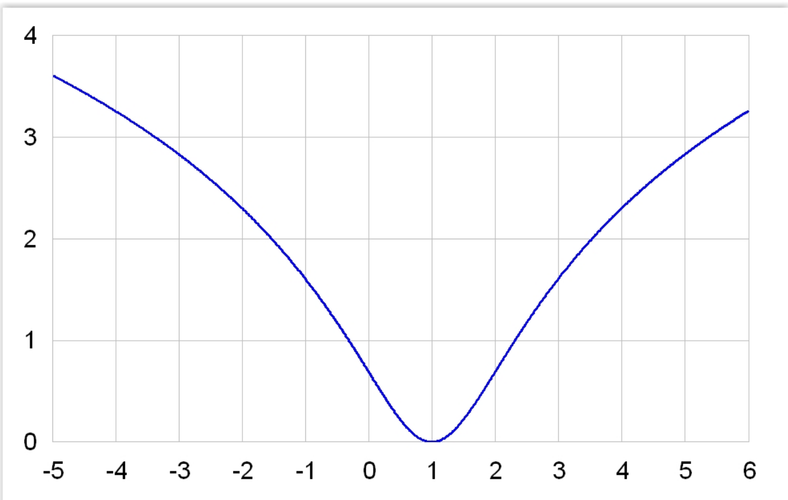
La fonction f' est dérivable sur D_f et $f''(x) = \dfrac{2(x^2-2x+2)-(2x-2)(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2} = \dfrac{2x^2-4x+4-4x^2+8x-4}{(x^2-2x+2)^2} = \dfrac{2x(2-x)}{(x^2-2x+2)^2}$ qui est du signe de $2x(2-x)$ c'est-à-dire positive sur $[0; 2]$.

f est donc convexe sur $[0; 2]$ et concave sur les intervalles $]-\infty; 0[$ et $]2; +\infty[$.

(v) *Tableau de variations*

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(vi) *Courbe*



Correction 13

(i) *Ensemble de définition*

Il faut que $x > 0$ donc f est définie sur $D_f =]0, +\infty[$.

De plus, f est continue sur D_f.

(ii) *Variations*

La fonction f est dérivable sur D_f et $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times (1 + \ln(x))}{x^2} = \dfrac{-\ln(x)}{x^2}$ qui est du signe de $-\ln(x)$ c'est-à-dire positive si et seulement si $x \leq 1$.

Donc f est croissante sur $]0; 1[$ et décroissante sur $]1; +\infty[$.

(iii) *Limites aux bornes et comportement asymptotique*

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$: La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

On a $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$: La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

(iv) *Convexité*

La fonction f' est dérivable sur D_f et $f''(x) = \dfrac{-\frac{1}{x} \times x^2 + 2x \times \ln(x)}{x^4} = \dfrac{-1 + 2\ln(x)}{x^3}$. qui est du signe de $-1 + 2\ln(x)$.

On a $-1 + 2\ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq e^1/2$

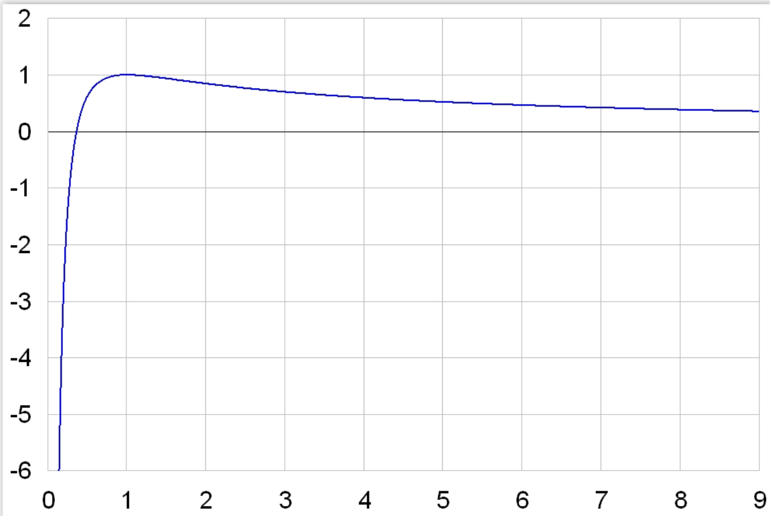
Sur $]0, e^{1/2}[$, on a $f''(x) < 0$ et f est concave.

Sur $]e^{1/2}, +\infty[$, on a $f''(x) > 0$ et f est convexe

(v) *Tableau de variations*

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

(vi) *Courbe*



Correction 14

1. Il faut que $x^3 - x^2 = x^2(x-1) > 0$ c'est-à-dire $x > 1$. On a donc $D_f =]1, +\infty[$.

   La fonction f est continue et dérivable sur D_f et, $\forall x \in D_f$, $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 2x}{x^3 - x^2} = \dfrac{x(3x-2)}{x^3 - x^2}$.

   Puisque sur D_f, on a $x^3 - x^2 > 0$ mais aussi $x > 0$ et $3x - 2 > 0$ on obtient que f' est toujours positive sur D_f. Ce qui signifie que f est croissante sur D_f.

   On a $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$: La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

   On a $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 - x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

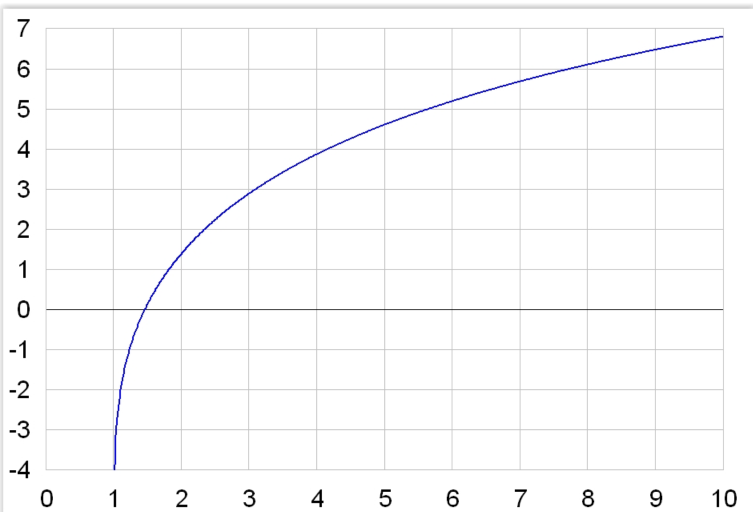
   De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^3)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 3\dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

   La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique dans la direction (Ox) en $+\infty$.

   La fonction f' est dérivable sur D_f et, $\forall x \in D_f$, on a :

   $f''(x) = \dfrac{(6x-2)(x^3 - x^2) - (3x^2 - 2x)(3x^2 - 2x)}{(x^3 - x^2)^2} = \dfrac{-3x^4 + 4x^3 - 2x^2}{x^4(x-1)^2} = \dfrac{-3x^2 + 4x - 2}{x^2(x-1)^2}$.

   $\Delta = 16 - 24 < 0$ donc $-3x^2 + 4x - 2$ est toujours strictement négatif. La fonction f est donc concave sur D_f.



2. Il faut que $x > 0$ et $x - 1 > 0$ donc $D_h = D_f =]1, +\infty[$.

   La fonction h est continue et dérivable sur l'intervalle D_h et, pour tout x de D_h, on a $h'(x) = 2\ln(x)+2+\ln(x-1)+1 = 2\ln(x)+\ln(x-1)+3 = \ln(x^2(x-1))+3 = \ln(x^3-x^2)+3$ c'est-à-dire $h'(x) = f(x) + 3$ ou encore $f(x) = h'(x) - 3$.

3. (a) D'après la question précédente, pour tout réel c, la fonction $g : x \mapsto h(x) - 3x + c$ vérifie $g'(x) = h'(x) - 3 = f(x)$.

   On traduit cette propriété avec les termes de l'énoncé.

   On a donc $C'_T(x) = C(x) = f(x)$ donc on a $C_T(x) = h(x) - 3x + k$ où k est une constante telle que $C_T(2) = 10$. Autrement dit, $h(2) - 6 + k = 10$ c'est-à-dire $k = 16 - h(2) = 16 - 4\ln(2) = 16 - \ln(16)$.

   D'où $C_T(x) = 2x\ln(x) + (x-1)\ln(x-1) - 3x + 16 - \ln(16)$

   (b) $C_T(9) - C_T(2) = 18\ln(9) + 8\ln(8) - 4\ln(2) - 21$ d'où : $C_T(9) - C_T(2) = 36\ln(3) + 20\ln(2) - 21$ $C_T(9) - C_T(2) \approx 32,41298600$ milliers d'euros donc approximativement 32 413 à l'euro près.

   (c) $C_T(9) - C_T(2)$ représente l'aire de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$, et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 9$.