Université de Picardie Jules Verne

UFR d'économie et de gestion

Mathématiques

Licence 1 - Semestre 1

Exercices d'entrainement **Feuille 7** **Corrigés**

Correction 1

(a) La matrice A est déjà échelonnée. Donc $\text{rg}\,(A) = 2$.

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -7 & -35 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + 7L_1$

$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

D'où $\text{rg}\,(B) = \text{rg}\,(B_1) = 1$.

(c) $C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \\ 9 & 5 & -3 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow 5L_2 + 2L_1; L_3 \leftarrow 5L_3 - 9L_1$

$C_1 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 0 & 8 & -12 \\ 0 & 34 & -51 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2; L_3 \leftarrow \frac{1}{17}L_3$

$C_2 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$C_3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D'où $\text{rg}\,(C) = \text{rg}\,(C_3) = 2$.

Correction 2

1. $2A - 3B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$.

2. $B + C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

   $A \times (B + C) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

   $A \times B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$A \times C = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A \times B + A \times C = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Correction 3

(a) M est une matrice 2×3 et P est une matrice 2×2.

On ne peut pas multiplier M par P mais on peut multiplier P par M.

Le résultat sera une matrice 2×3.

$$P \times M = \begin{pmatrix} -4 & 15 & 31 \\ -6 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

(b) M est une matrice 3×1 et P est une matrice 1×3.

On peut multiplier M par P et P par M.

$M \times P$ sera une matrice 3×3.

$P \times M$ sera une matrice 1×1.

$$M \times P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P \times M = (6)$$

(c) M est une matrice 3×4 et P est une matrice 4×3.

On peut multiplier M par P et P par M.

$M \times P$ sera une matrice 3×3.

$P \times M$ sera une matrice 4×4.

$$M \times P = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 3 \\ 6 & 15 & 9 \\ 0 & -9 & 9 \end{pmatrix}$$

$$P \times M = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 16 & 4 \\ 2 & 2 & -14 & -6 \\ 1 & 11 & 23 & 7 \\ 1 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Correction 4

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & 7 & -11 \\ -2 & -2 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -8 & 17 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \text{ donc } A \text{ est bien inversible.}$$

$$\operatorname{Com} A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 7 & -11 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & -11 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 7 & -11 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & -11 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 43 & 20 \\ 11 & 17 & 8 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^t\operatorname{Com} A = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 27 & 11 & -2 \\ 43 & 17 & -4 \\ 20 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Correction 5

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 4 & -14 & -4 \\ 2 & -12 & 11 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -6 & 15 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{matrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \text{ donc } A \text{ est bien inversible.} \end{aligned}$$

$$\operatorname{Com} A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -14 & -4 \\ -12 & 11 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -14 \\ 2 & -12 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -12 & 11 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -12 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -14 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -14 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -202 & -52 & -20 \\ 57 & 15 & 6 \\ -16 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^t\operatorname{Com} A = \frac{-1}{6}\begin{pmatrix} -202 & 57 & -16 \\ -52 & 15 & -4 \\ -20 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Correction 6

1. $\det M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -2 & -3 & 8 \\ 3 & 4 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$

   $\det M \neq 0$ donc M est inversible.

2. On a $M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Le système est équivalent à $MX = B$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

   Donc $X = M^{-1} \times B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   D'où $S = \{(1;5;2)\}$.

Correction 7

1. $\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & \lambda \end{vmatrix}$ $\qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1;\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$

   $= \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 8 & \lambda - 6 \end{vmatrix}$

   $= - \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 8 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = 2\lambda + 12$

   A inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -6$.

2. On a donc $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -7 \end{pmatrix}$

   $\det(A) = 2\lambda + 12 = -2$

   $\mathrm{Com}\, A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 3 & -13 & -8 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

   $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} {}^t\mathrm{Com}\, A = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -13 & -3 \\ 2 & -8 & -2 \end{pmatrix}$

3. (a) Si on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, le système (1) est équivalent à l'équation $AX = B$.
   Puisque A est inversible, on obtient la solution via l'équation $X = A^{-1} \times B$ en faisant une multiplication de matrice.
   On obtient $X = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}$ soit $\begin{cases} x & = -4 \\ y & = 11 \\ z & = 6 \end{cases}$
   Et $\mathcal{S} = \{(-4; 11; 6)\}$

   (b) On a $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}}{\det A}$ $\qquad C_1 \leftarrow C_1 + C_3\ ;\ C_2 \leftarrow C_2 + C_3;$

   $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & -7 \end{vmatrix}}{-2} = \dfrac{(-1) \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -6 & -2 \end{vmatrix}}{-2} = \dfrac{(-1) \times (-8)}{-2} = -4$

   $y = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -7 \end{vmatrix}}{\det A}$ $\qquad C_1 \leftarrow C_1 + C_3\ ;\ C_2 \leftarrow C_2 + C_3;$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -6 & -7 \end{vmatrix}}{-2} y = \frac{(-1) \times \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -4 & -6 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{(-1) \times (22)}{-2} = 11$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{\det A} \qquad C_1 \leftarrow C_1 - C_3 \ ; \ C_2 \leftarrow C_2 - C_3;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-(-1) \times \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1 \times (-12)}{-2} = 6$$

Correction 8

1. $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -5 & -4 \\ 3 & 10 & \lambda \end{vmatrix}$ $\qquad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1;\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & \lambda - 9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & \lambda - 9 \end{vmatrix} = -\lambda + 1$$

A inversible $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $\lambda \neq 1$.

2. On a donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -5 & -4 \\ 3 & 10 & 0 \end{pmatrix}$

$\det(A) = -\lambda + 1 = 1$

$$\text{Com}\, A = \begin{pmatrix} 40 & -12 & -5 \\ 30 & -9 & -4 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, {}^t\text{Com}\, A = \begin{pmatrix} 40 & 30 & 7 \\ -12 & -9 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

3. (a) Si on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, le système (1) est équivalent à l'équation $AX = B$.

Puisque A est inversible, on obtient la solution via l'équation $X = A^{-1} \times B$ en faisant une multiplication de matrice.

On obtient $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ soit $\begin{cases} x & = 3 \\ y & = -1 \\ z & = 0 \end{cases}$

Et $\mathcal{S} = \{(3; -1; 0)\}$

(b) On a $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -5 & -4 \\ -1 & 10 & 0 \end{vmatrix}}{\det A}$ $\qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1\ ;\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1;$

$$x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 12 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 12 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 12 = 3$$

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\det A}$ $\qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1\ ;\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1;$

$$y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & -1 \\ 3 & 10 & -1 \end{vmatrix}}{\det A} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \ ; \ L_3 \leftarrow L_3 + L_1;$$

$$z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 4 & 12 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = -12 - (-12) = 0$$