Université de Picardie Jules Verne

UFR d'économie et de gestion

Mathématiques

Licence 1 - Semestre 1

Exercices d'entrainement **Feuille 7** **Enoncés**

Exercice 1

Déterminer le rang des matrices suivantes :

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -7 & -35 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \\ 9 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $2A - 3B$
2. Calculer de deux manières différentes $A \times (B + C)$.

Exercice 3

Déterminer, si cela est possible, MP et PM dans les cas suivants :

(a) $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

(b) $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 4

Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & 7 & -11 \\ -2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 5

Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 4 & -14 & -4 \\ 2 & -12 & 11 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 6

1. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -2 & -3 & 8 \\ 3 & 4 & -11 \end{pmatrix}$.
   M est-elle inversible?
   Si oui, déterminer M^{-1} sinon calculer M^3.
2. Résoudre le système : $\begin{cases} x + y - 4z = -2 \\ -2x - 3y + 8z = -1 \\ 3x + 4y - 11z = 1 \end{cases}$.

Exercice 7

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de λ, la matrice A est-elle inversible? (On utilisera **obligatoirement** un déterminant pour répondre à cette question.)
2. On pose $\lambda = -7$. Déterminer A^{-1}.
3. Soit le système linéaire suivant : $\begin{cases} -x + y + -2z = 3 \\ -x - y + z = -1 \\ 3x + 5y - 7z = 1 \end{cases} \quad (1)$
   (a) Résoudre le système (1) en utilisant une équation matricielle (et **uniquement** de cette façon).
   (b) Résoudre le système (1) par la méthode de Cramer (et **uniquement** de cette façon).

Exercice 8

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -5 & -4 \\ 3 & 10 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de λ, la matrice A est-elle inversible? (On utilisera **obligatoirement** un déterminant pour répondre à cette question.)
2. On pose $\lambda = 0$. Déterminer A^{-1}.
3. Soit le système linéaire suivant : $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -2x - 5y - 4z = -1 \\ 3x + 10y = -1 \end{cases} \quad (1)$
   (a) Résoudre le système (1) en utilisant une équation matricielle (et **uniquement** de cette façon).
   (b) Résoudre le système (1) par la méthode de Cramer (et **uniquement** de cette façon).