Université de Picardie Jules Verne

UFR d'économie et de gestion

Mathématiques

Licence 1 - Semestre 2

Exercices d'entrainement **Développements limités** **Corrigés**

Correction 1

- (Attention au cas $x < 0$) $0 \leq |x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)| \leq |x|$ donc $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.
- On pose $X = \dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1$.

Correction 2

- On pose $X = \dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x \to \infty} x \ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\ln(1-X)}{X} = -1$.
- On pose $X = \dfrac{1}{\sqrt{2x+5}}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x+5} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2x+5}}\right) = \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$.
- On pose $X = \dfrac{1}{2x^2}$, on a $3x^2 = \dfrac{3}{2} \times 2x^2 = \dfrac{3}{2X}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} 3x^2 \ln\left(1 - \dfrac{1}{2x^2}\right) = \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{3}{2} \times \dfrac{\ln(1-X)}{X} = -\dfrac{3}{2}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x+5) \ln\left(1 + \dfrac{1}{x-1}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+5}{x-1} \times (x-1) \ln\left(1 + \dfrac{1}{x-1}\right)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+5}{x-1} = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1) \ln\left(1 + \dfrac{1}{x-1}\right) = 1$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \ln\left(1 - \dfrac{1}{x+3}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x+3} \times (x+3) \ln\left(1 - \dfrac{1}{x+3}\right)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x+3} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+3) \ln\left(1 - \dfrac{1}{x+3}\right) = -1$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \ln\left(1 - \dfrac{1}{x+3}\right) = -\infty$.

Correction 3

Rappel : Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)}$ est une forme indéterminée.

$\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x = \left(1 - \dfrac{1}{x+1}\right)^x = e^{x \ln\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)}$.

Or $\ln\left(1 - \dfrac{1}{x+1}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{x+1}$ et $x \ln\left(1 - \dfrac{1}{x+1}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{x}{x+1}$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(1 - \dfrac{1}{x+1}\right) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x = e^{-1}$.

Correction 4

$(\cos x)^{1/x^2} = e^{\frac{1}{x^2}\ln\cos x}$. On a $\ln\cos x = \ln(1+\cos x - 1)$. Or $\cos x - 1 \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ et $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$, donc $\ln\cos x \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$ et $\dfrac{1}{x^2}\ln\cos x \underset{0}{\sim} -\dfrac{1}{2}$. D'où $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2} = e^{-1/2}$.

Correction 5

f est infiniment dérivable sur $\left]-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.

Rappel : Si f est continue et dérivable n fois sur un voisinage I de x_0, alors il existe une fonction ε définie sur I telle que : $\forall x \in I,\ f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \dfrac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dfrac{(x-x_0)^3}{3!}f^{(3)}(x_0) + \cdots + \dfrac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n\varepsilon(x-x_0)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x-x_0) = 0$

Rappel : $(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1}$.

$f'(x) = -\dfrac{1}{2} \times 2 \times (1+2x)^{-\frac{1}{2}-1} = -(1+2x)^{-\frac{3}{2}}$
$f'(0) = -1$.

$f''(x) = -\dfrac{-3}{2} \times 2 \times (1+2x)^{-\frac{3}{2}-1} = 3(1+2x)^{-\frac{5}{2}}$
$f''(0) = 3$.

$f^{(3)}(x) = 3 \times \dfrac{-5}{2} \times 2 \times (1+2x)^{-\frac{5}{2}-1} = -15(1+2x)^{-\frac{7}{2}}$
$f^{(3)}(0) = -15$.
$f^{(4)}(x) = -15 \times \dfrac{-7}{2} \times 2 \times (1+2x)^{-\frac{7}{2}-1} = 105(1+2x)^{-\frac{9}{2}}$
$f^{(4)}(0) = 105$.

De plus, $f(0) = 1$.

On la formule de Taylor-Young à l'ordre 4 en 0 :

$f(x) = f(0) + (x-0)f'(0) + \dfrac{(x-0)^2}{2!}f''(0) + \dfrac{(x-0)^3}{3!}f^{(3)}(0) + \dfrac{(x-0)^4}{4!}f^{(4)}(0) + (x-0)^4\varepsilon(x-0)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x-0) = 0$.

Il reste à remplacer les valeurs.

$f(x) = 1 - x + \dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{15x^3}{6} + \dfrac{105x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Ce qui donne après simplification :

$f(x) = 1 - x + \dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{5x^3}{2} + \dfrac{35x^4}{8} + x^4\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Correction 6

1. $f(x) = e(x-1) - 2e(x-1)^2 + \dfrac{17e}{6}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$.
2. D'après la formule de Taylor-Young, on a :

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{6}(x-1)^3 + o((x-1)^3).$$

Donc :
$f(1 = 0$
$f'(1) = e$
$f''(1) = -4e$
$f^{(3)}(1) = 17e$

Correction 7

1. $f(x) = 12x^2 - 48x^3 + o(x^3)$.
2. D'après la formule de Taylor-Young, on a :
   $f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2}x^2 + \dfrac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + \dfrac{f^{(3)}(0)}{24}x^3 + o(x^3)$.
   Donc :
   $f(0) = 0$
   $f'(0) = 0$
   $f''(0) = 24$
   $f^{(3)}(0) = -288$

Correction 8

1. $f(x) = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^3)$.
2. D'après la formule de Taylor-Young, on a :
   $f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2}x^2 + \dfrac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + o(x^3)$.
   Donc :
   $f(0) = 1$
   $f'(0) = 1$
   $f''(0) = 1$
   $f^{(3)}(0) = 0$

Correction 9

1. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{24}x^4 + o(x^4)$.
2. D'après la formule de Taylor-Young, on a :
   $f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2}x^2 + \dfrac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + \dfrac{f^{(3)}(0)}{24}x^3 + o(x^3)$.
   Donc :
   $f(0) = 1$
   $f'(0) = 0$
   $f''(0) = 1$
   $f^{(3)}(0) = 0$
   $f^{(4)}(0) = 5$

Correction 10

1. $x\ln(1-x^2) = -x^3 + o(x^3)$
2. $1 + x\sin x - \cos x = \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^3)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(1-x^2)}{1+x\sin x - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^3}{\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x\to 0} -2x = 0.$

Correction 11

1. $\sin x - x = -\dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)$
2. $x - x\cos x = \dfrac{1}{2}x^3 + o(x^3)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x - x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3}{\frac{1}{2}x^3} = -\frac{1}{3}.$

Correction 12

On a $f(x) = \dfrac{1}{x^3} \times \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}$.

Si on pose $x = \dfrac{1}{h}$, x proche de $+\infty$ est équivalent à h proche de 0^+. Et, on a :

$$f(x) = f\left(\frac{1}{h}\right) = h^3\ln(1+h) + h - h^2 + 3h^3 = h - h^2 + 3h^3 + h^3\ln(1+h)$$
$$= h - h^2 + 3h^3 + o(h^3) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x}^2 + \frac{3}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$