



# Mathématiques

Licence 1 - Semestre 2

Exercices d'entraînement

Fonctions de deux variables (1/3)

Enoncés

## Exercice 1

Donner les ensembles de définition des fonctions de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  suivantes :

1.  $f : (x, y) \mapsto \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x + y + 1}}$

2.  $g : (x, y) \mapsto \frac{x^2 + y^2 + 2x}{xy}$

3.  $h : (x, y) \mapsto \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x + 2y - 1}$

4.  $i : (x, y) \mapsto \ln(2x + y - 3)$

## Exercice 2

Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 des fonctions suivantes :

1.  $f : (x, y) \mapsto x^3y + 3xy^2 - x^2 + 3y + 5$

2.  $g : (x, y) \mapsto \ln(x^2 + y - 2)$

3.  $h : (x, y) \mapsto (x^2 - y)e^{xy}$

4.  $i : (x, y) \mapsto \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$

5.  $j : (x, y) \mapsto \sin(x^2 - 3xy)$

## Exercice 3

1. Rappeler la définition d'une fonction homogène de degré  $k$ .

2. Rappeler l'identité d'Euler.

3. Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = \frac{2xy^3}{x + y}$ .

(a) Vérifier que  $f$  est homogène.

(b) Vérifier l'identité d'Euler.

(c) Les fonctions  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont-elles homogènes?

(d) Montrer que l'on a :

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6f(x, y).$$

#### Exercice 4

La demande  $D$  d'un bien  $A$  dépend de son prix  $p_A$  et des prix  $p_B$  et  $p_C$  de deux biens  $B$  et  $C$ . Elle est définie par  $D = p_A^{-0,3} p_B^{0,1} p_C^{-0,4}$ .

Calculer les élasticités de  $D$  par rapport aux prix  $p_A$ ,  $p_B$  et  $p_C$ .