Université de Picardie Jules Verne

UFR d'économie et de gestion

Mathématiques

Licence 1 - Semestre 2

Exercices d'entrainement **Fonctions de deux variables (2/3)** **Corrigés**

Correction 1

La formule de Taylor à l'ordre 2 pour une fonction f est :

$$\begin{aligned}
f(x_0+h,y_0+k) = f(x_0,y_0) &+ hf'_x(x_0,y_0)+kf'_y(x_0,y_0)\\
&+\frac{1}{2}\left(h^2f''_{x^2}(x_0,y_0)+2hkf''_{xy}(x_0,y_0)+k^2f''_{y^2}(x_0,y_0)\right)\\
&+\sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k) \text{ avec } \lim_{(h,k)\,\to\,(0,0)}\varepsilon(h,k)=0
\end{aligned}$$

On doit donc déterminer les valeurs des dérivées premières et secondes de f en $(-1;2)$.

$f'_x(x,y) = y^2+4x$ $\quad f'_x(-1;2)=4-4=0$

$f'_y(x,y)=2xy+2y$ $\quad f'_y(-1;2)=-4+4=0$

$f''_{x^2}(x,y)=4$ $\quad f''_{x^2}(-1;2)=4$

$f''_{xy}(x,y)=2y$ $\quad f''_{xy}(-1;2)=4$

$f''_{y^2}(x,y)=2x+2$ $\quad f''_{y^2}(-1;2)=-2+2=0$

De plus, $f(-1;2)=-4+2+4=2$

On remplace dans la formule de Taylor et on obtient :

$$\begin{aligned}
f(-1+h,2+k) &= f(-1;2)+hf'_x(-1;2)+kf'_y(-1;2)\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(h^2f''_{x^2}(-1;2)+2hkf''_{xy}(-1;2)+k^2f''_{y^2}(-1;2)\right)+\sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k)\\
&=2+h.0+k.0+\frac{1}{2}\left(h^2.4+2hk.4+k^2.0\right)+\sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k)\\
&=2+\frac{1}{2}\left(4h^2+8hk\right)+\sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k)\\
&=2+2h^2+4hk+\sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k) \qquad \text{avec } \lim_{(h,k)\,\to\,(0,0)}\varepsilon(h,k)=0
\end{aligned}$$

Correction 2

$$\begin{aligned}
f(1+h,1+k) &= f(1,1)+Df_{(1,1)}(h,k)+\frac{1}{2!}\left[h\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)+k\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\right]^2\\
&\qquad+\|(h,k)\|\,\varepsilon(h,k) \text{ avec } \lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0\\
&= f(1,1)+h\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)+k\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)+\frac{1}{2}\left[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)\right]\\
&\qquad+\|(h,k)\|\,\varepsilon(h,k) \text{ avec } \lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0
\end{aligned}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=e^{x\ln y}\ln y=y^x\ln y$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=xy^{x-1}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=(\ln y)^2e^{x\ln y}$ $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=y^{x-1}+x(\ln y)y^{x-1}$ $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=x(x-1)y^{x-2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 1$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 0$$

$$\begin{aligned} f(h,k) &= 1 + k + \frac{1}{2}(2hk) + \|(h,k)\| \, \varepsilon_{(0,0)}(h,k) \\ &= 1 + k + hk + \|(h,k)\| \, \varepsilon_{(0,0)}(h,k) \text{ avec } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_{(0,0)}(h,k) = 0. \end{aligned}$$