



Mathématiques

Licence 1 - Semestre 2

Exercices d'entraînement

Fonctions de deux variables (3/3)

Corrigés

Correction 1

On doit, dans un premier temps, déterminer les points critiques (appelés aussi stationnaires) c'est-à-dire les points où les dérivées premières s'annulent simultanément.

Puis, si (x_0, y_0) est un point critique, on étudie le déterminant de la matrice hessienne :

$$H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f''_{x^2}(x_0, y_0) & f''_{yx}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

1. On commence par la recherche des points critiques :

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \Leftrightarrow 6y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}$$

Le seul point critique est donc $\left(-1; \frac{2}{3}\right)$.

Pour déterminer la matrice hessienne de f en un point (x_0, y_0) , on doit calculer ses dérivées secondes : $f''_{x^2}(x, y) = 2$ $f''_{xy}(x, y) = 6$ $f''_{y^2}(x, y) = 0$

La matrice hessienne de f en $\left(-1; \frac{2}{3}\right)$ est $H_f\left(-1; \frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ (mais ici, elle ne dépend pas du point choisi).

$$\text{Autrement dit } r = f''_{x^2}\left(-1, \frac{2}{3}\right) = 2 \quad s = f''_{xy}\left(-1, \frac{2}{3}\right) = 0 \quad t = f''_{y^2}\left(-1, \frac{2}{3}\right) = 6.$$

Son déterminant est $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = rt - s^2 = 12 > 0$ c'est donc bien un extrema.

Puisque $r > 0$, il s'agit d'un minimum.

2. On a $g'_x(x, y) = 4x + 4y - 8$ et $g'_y(x, y) = 4x + 4 - 2y$.

$$\begin{cases} g'_x(x, y) = 0 \\ g'_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 4y - 8 = 0 \\ 4x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 4y - 8 = 0 \\ 2y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

Le seul point critique est $(0; 2)$.

Pour déterminer la matrice hessienne de g en un point $(0; 2)$, on doit calculer ses dérivées secondes : $g''_{x^2}(x, y) = 4$ $g''_{xy}(x, y) = 4$ $g''_{y^2}(x, y) = -2$

La matrice hessienne de g en $(0; 2)$ est $H(0; 2) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Son déterminant est $\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 4 \times (-2) - 4 \times 4 = -24$.

Puisque $\det H(0; 2) < 0$, le point $g(0; 2)$ est un point col de la courbe représentative de g .

3. On a $h'_x(x, y) = -6x + 2y + 5$ et $h'_y(x, y) = 2x - 10 - 4y$.

$$\begin{cases} h'_x(x, y) = 0 \\ h'_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 2y + 5 = 0 \\ 2x - 4y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ 2x - 4y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Le seul point critique est $\left(0; -\frac{5}{2}\right)$.

Pour déterminer la matrice hessienne de h en un point $\left(0; -\frac{5}{2}\right)$, on doit calculer ses dérivées secondes : $h''_{x^2}(x, y) = -6$ $h''_{xy}(x, y) = 2$ $h''_{y^2}(x, y) = -4$

La matrice hessienne de h en $\left(0; -\frac{5}{2}\right)$ est $H\left(0; -\frac{5}{2}\right) = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

Son déterminant est $\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -6 \times (-4) - 2 \times 2 = 20$.

Puisque $\det H\left(0; -\frac{5}{2}\right) > 0$ et $h''_{x^2}\left(0; -\frac{5}{2}\right) < 0$, la fonction h admet un maximum local en $\left(0; -\frac{5}{2}\right)$.

Correction 2

1. L'équation $2x + y - 1 = 0$ entraîne $y = 1 - 2x$.

On remplace y par cette valeur dans $f(x, y)$ et on obtient une fonction de x .

$$h(x) = f(x, y) = f(x, 1 - 2x)$$

$$h(x) = x^3(1 - 2x) - x^2 + 3x + (1 - 2x)^2 + 2(1 - 2x)$$

$$h(x) = x^3 - 2x^4 - x^2 + 3x + 1 - 4x + 4x^2 + 2 - 4x$$

$$h(x) = -2x^4 + x^3 + 3x^2 - 5x + 3$$

On étudie les variations de h .

$$h'(x) = -8x^3 + 3x^2 + 6x - 5 \text{ dont une racine évidente est } -1$$

$$\text{D'où } h'(x) = (x + 1)(-8x^2 + 11x - 5).$$

$$\text{Soit } P = -8x^2 + 11x - 5. \text{ On a } \Delta = 11^2 - 4 \times (-8) \times (-5) = 121 - 160 < 0.$$

Cela signifie que P est toujours négatif et que $h'(x)$ est du signe opposé à $x + 1$.

$$\text{Autrement dit, } h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \text{ et } h'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \geq -1.$$

La fonction h admet un maximum pour $x = -1$. Ce qui signifie que f admet un maximum en $(-1, 3)$.

2. Soit λ un réel. On pose $L(\lambda, x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$

On cherche les points critiques de L .

$$L'_x(\lambda, x, y) = 3x^2y - 2x + 3 + 2\lambda$$

$$L'_y(\lambda, x, y) = x^3 + 2y + 2 + \lambda$$

$$L'_\lambda(\lambda, x, y) = 2x + y - 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L'_x(\lambda, x, y) = 0 \\ L'_y(\lambda, x, y) = 0 \\ L'_\lambda(\lambda, x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2y - 2x + 3 + 2\lambda = 0 \\ x^3 + 2y + 2 + \lambda = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2y - 2x + 3 + 2\lambda = 0 \\ \lambda = -x^3 - 2y - 2 \\ y = 1 - 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2(1 - 2x) - 2x + 3 + 2(-x^3 - 2(1 - 2x) - 2) = 0 \\ \lambda = -x^3 - 2y - 2 \\ y = 1 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x^3 + 3x^2 + 6x - 5 = 0 \\ \lambda = -x^3 - 2y - 2 \\ y = 1 - 2x \end{cases}$$

Nous avons résolu au 1. la première équation dont la solution est $x = -1$. On trouve ensuite $y = 3$ et $\lambda = -7$.

Le seul point critique est $a = (-1; 3; 7)$.

On recherche maintenant la nature du point critique en calculant le déterminant de la matrice hessienne bordée du lagrangien. Pour cela, on cherche en premier lieu les (9) dérivées secondes.

$$L''_{\lambda^2}(\lambda, x, y) = 0$$

$$L''_{x^2}(\lambda, x, y) = 6xy - 2$$

$$L''_{y^2}(\lambda, x, y) = 2$$

$$L''_{\lambda x}(\lambda, x, y) = L''_{x\lambda}(\lambda, x, y) = 2$$

$$L''_{\lambda y}(\lambda, x, y) = L''_{y\lambda}(\lambda, x, y) = 1$$

$$L''_{yx}(\lambda, x, y) = L''_{xy}(\lambda, x, y) = 3x^2$$

On obtient la matrice hessienne bordée du lagrangien :

$$\overline{H}(\lambda, x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 6xy - 2 & 3x^2 \\ 1 & 3x^2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{En calculant au point critique, cela donne } \overline{H}(a) = \overline{H}(-1, 3, -7) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -20 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dont le déterminant vaut :

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -20 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -26 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 26 = 24$$

On a donc $|\overline{H}(a)|_3 > 0$: L admet un maximum en (a) .

Correction 3

1. (a) L'équation $x + y - 5 = 0$ entraîne $y = 5 - x$. On remplace y par cette valeur dans $f(x, y)$ et on obtient une fonction de x .

$$h(x) = f(x, y) = f(x, 5 - x) = x^2(5 - x)^3$$

On va étudier les variations de h .

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2x(5 - x)^3 + x^2(3)(-1)(5 - x)^2 \\ &= (5 - x)^2[2x(5 - x) - 3x^2] = (5 - x)^2[x(10 - 2x - 3x)] \\ &= (5 - x)^2[x(10 - 5x)] = 5(5 - x)^2[x(2 - x)] \end{aligned}$$

Puisque $x > 0$, $h'(x)$ est du signe $2 - x$ soit $h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.

On obtient que h admet uniquement un extremum en 2. C'est-à-dire f admet un maximum en $(2; 3)$.

- (b) Soit λ un réel.

$$\begin{aligned} \text{On pose } L(\lambda, x, y) &= f(x, y) + \lambda g(x, y) \\ &= x^2y^3 + \lambda(x + y - 5). \end{aligned}$$

On cherche les points critiques de L .

$$L'_x(\lambda, x, y) = 2xy^3 + \lambda$$

$$L'_y(\lambda, x, y) = 3x^2y^2 + \lambda$$

$$L'_\lambda(\lambda, x, y) = x + y - 5$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} L'_x(\lambda, x, y) = 0 \\ L'_y(\lambda, x, y) = 0 \\ L'_\lambda(\lambda, x, y) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy^3 + \lambda = 0 \\ 3x^2y^2 + \lambda = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy^3 + \lambda = 0 \\ 2xy^3 - 3x^2y^2 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy^3 + \lambda = 0 \\ xy^2(2y - 3x) = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy^3 + \lambda = 0 \\ 2y - 3x = 0 \text{ car } x > 0 \text{ et } y > 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy^3 + \lambda = 0 \\ 2y - 3x = 0 \\ 5y - 15 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -108 \\ x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Le seul point critique est $a = (2; 3; -108)$.

On recherche maintenant la nature du point critique en calculant le déterminant de la matrice hessienne bordée du lagrangien. Pour cela, on cherche en premier lieu les (9) dérivées secondes.

$$L''_{\lambda^2}(\lambda, x, y) = 0$$

$$L''_{x^2}(\lambda, x, y) = 2y^3$$

$$L''_{y^2}(\lambda, x, y) = 6x^2y$$

$$L''_{\lambda x}(\lambda, x, y) = L''_{x\lambda}(\lambda, x, y) = 1$$

$$L''_{\lambda y}(\lambda, x, y) = L''_{y\lambda}(\lambda, x, y) = 1$$

$$L''_{yx}(\lambda, x, y) = L''_{xy}(\lambda, x, y) = 6xy^2$$

On obtient la matrice hessienne bordée du lagrangien :

$$\overline{H}(\lambda, x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2y^3 & 6xy^2 \\ 1 & 6xy^2 & 6x^2y \end{pmatrix} \text{ et } \overline{H}(a) = \overline{H}(2, 3, -108) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 54 & 108 \\ 1 & 108 & 72 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Dont le déterminant vaut : } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 54 & 108 \\ 1 & 108 & 72 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 54 & 108 \\ 0 & 54 & -36 \end{vmatrix} = -(-36 - 54) > 0$$

La fonction L admet donc un maximum en $(2, 3, -108)$.

Correction 4

1. Soit G la fonction de profit.

$$\begin{aligned}\text{On a : } G(q_A, q_B) &= p_A q_A + p_B q_B - c(q_A, q_B) \\ &= (35 - 4q_A)q_A + (26 - q_B)q_B - q_A^2 - q_B^2 - 3q_A q_B \\ &= -5q_A^2 - 2q_B^2 - 3q_A q_B + 35q_A + 26q_B\end{aligned}$$

2. On a $G'_{q_A}(q_A, q_B) = -10q_A - 3q_B + 35$. et $G'_{q_B}(q_A, q_B) = -4q_B - 3q_A + 26$.

$$\begin{aligned}\begin{cases} G'_{q_A}(q_A, q_B) = 0 \\ G'_{q_B}(q_A, q_B) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -10q_A - 3q_B + 35 = 0 \\ -3q_A - 4q_B + 26 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -31q_A + 4 \times 35 - 3 \times 26 = 0 \\ -3q_A - 4q_B + 26 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} q_A = 2 \\ q_B = 5 \end{cases}\end{aligned}$$

Le seul point critique est $(2; 5)$.

3. Pour déterminer la matrice hessienne de G en un point $(2; 5)$, on doit calculer ses dérivées secondes :

$$G''_{q_A^2}(q_A, q_B) = -10 \quad G''_{q_A q_B}(q_A, q_B) = -3 \quad G''_{q_B^2}(q_A, q_B) = -4$$

La matrice matrice hessienne de G en $(2; 5)$ est

$$H(2; 5) = \begin{pmatrix} -10 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \text{ et son déterminant est } \begin{vmatrix} -10 & -3 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 40 - 9 = 31.$$

Puisque $\det H(2; 5) > 0$ et $G''_{q_A^2}(2; 5) < 0$, la fonction G admet un maximum en $(2; 5)$ qui vaut $G(2; 5) = 100$.

4. On effectue la substitution $q_B = 5 - 2q_A$. On obtient une fonction de q_A :

$$\begin{aligned}H(q_A) &= G(q_A, 5 - 2q_A) \\ &= -5q_A^2 - 2(5 - 2q_A)^2 - 3q_A(5 - 2q_A) + 35q_A + 26(5 - 2q_A) \\ &= -7q_A^2 + 8q_A + 80\end{aligned}$$

On étudie les variations : $H'(q_A) = -14q_A + 8$.

$$H'(q_A) \geq 0 \Leftrightarrow -14q_A + 8 \geq 0 \Leftrightarrow q_A \leq \frac{4}{7}.$$

H admet donc un maximum en $\frac{4}{7}$ qui vaut $H\left(\frac{4}{7}\right) = G\left(\frac{4}{7}; 5 - \frac{4}{7}\right) = -7 \times \frac{4^2}{7^2} + 8 \times \frac{4}{7} + 80 = \frac{576}{7}$.