Université de Picardie Jules Verne

UFR d'économie et de gestion

Mathématiques

Licence 1 - Semestre 2

Exercices d'entrainement **Les nombres complexes** **Corrigés**

Correction 1

Attention : dans la forme algébrique d'un nombre $z \in \mathbb{C}$, lorsque l'on écrit $z = a + ib$, les nombres a et b doivent être dans $\mathbb{R}$.
On ne laisse pas un complexe au dénominateur d'une fraction.

1. $z + z' = (5 + 2i) + (3 - i) = 8 + i$
2. $z \times z' = (5 + 2i) \times (3 - i) = 15 - 5i + 6i - 2i^2$
   $= 15 - 5i + 6i + 2 = 17 + i.$
3. $z^2 = (5 + 2i)^2 = 25 + 20i + 4i^2 = 21 + 20i.$
4. $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{5 + 2i}{3 - i} = \dfrac{(5 + 2i)(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} = \dfrac{15 + 5i + 6i + 2i^2}{3^2 - i^2}$
   $= \dfrac{13 + 11i}{10} = \dfrac{13}{10} + \dfrac{11}{10}i.$

Correction 2

Rappels : Si $z = a + ib$, alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Et il existe un réel θ tel que :
$\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{a}{|z|}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{b}{|z|}.$

1. Ici $a = 1$ et $b = 1$.

   $|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

   On cherche θ tel que $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   D'où $\theta \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ et $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}.$

2. $z_2 = 2 + 2i\sqrt{3}$
   Ici $a = 2$ et $b = 2\sqrt{3}$.

   $|z_2| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 2^2\sqrt{3}^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4.$

On cherche θ tel que $\cos\theta = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

D'où $\theta \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ et $z_2 = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$.

3. $z_3 = -3$

   Ici $a = -3$ et $b = 0$.

   $|z_3| = \sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$.

   On cherche θ tel que $\cos\theta = \dfrac{-3}{3} = -1$ et $\sin\theta = \dfrac{0}{3} = 0$.

   D'où $\theta \equiv \pi[2\pi]$ et $z_3 = 3(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = 3e^{i\pi}$.

4. $z_4 = i\sqrt{2}$

   Ici $a = 0$ et $b = \sqrt{2}$.

   $|z_4| = \sqrt{\sqrt{2}^2} = \sqrt{2}$.

   On cherche θ tel que $\cos\theta = \dfrac{0}{\sqrt{2}} = 0$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$.

   D'où $\theta \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ et $z_4 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/2}$.

Correction 3

Attention : dans la forme algébrique d'un nombre $z \in \mathbb{C}$, lorsque l'on écrit $z = a + ib$, les nombres a et b doivent être dans $\mathbb{R}$.

1. $Z_1 = (1+i)(1-3i) + (1+i)^3 = (1+i)[(1-3i) + (1+i)^2]$
   $= (1+i)[1-3i+1+2i-1] = (1+i)(1-i)$
   $= 1^2 - i^2 = 1-(-1) = 1+1 = 2$

2. Rappels : Le complexe conjugué de $z = a+ib$ où $a,b \in \mathbb{R}$ est le complexe $\overline{z} = a - ib$.

   Le produit $z \times \overline{z} = a^2 + b^2$ est toujours réel.

   $$Z_2 = \frac{(5+3i)\times(1-2i)}{(1+2i)\times(1-2i)} + \frac{(1-2i)\times(5-3i)}{(5+3i)\times(5-3i)} = \frac{11-7i}{5} + \frac{-1-13i}{34}$$
   $$= \frac{374-238i-5-65i}{5\times 34} = \frac{369-303i}{170} = \frac{369}{170} - \frac{303}{170}i.$$

3. $$Z_3 = \left(\frac{(1+i)\,(2+i)}{(2-i)\,(2+i)}\right)^2 + \frac{(1-7i)\,(4-3i)}{(4+3i)\,(4-3i)} = \left(\frac{1+3i}{5}\right)^2 + \frac{4-3i-28i-21}{25}$$
   $$= \frac{-8+6i}{25} + \frac{-17-31i}{25} = \frac{-25-25i}{25} = -1-i$$

4. $Z_4 = \left(\dfrac{(1-i)\times(2-i)}{(2+i)\times(2-i)}\right)^4 = \left(\dfrac{2-i-2i-1}{5}\right)^4 = \dfrac{(1-3i)^4}{5^4} = \dfrac{\left[(1-3i)^2\right]^2}{625}$
$= \dfrac{(1-6i-9)^2}{625} = \dfrac{(-8-6i)^2}{625} = \dfrac{(8+6i)^2}{625} = \dfrac{8^2+2\times 8\times 6i+(6i)^2}{625}$
$= \dfrac{64+96i-36}{625} = \dfrac{28+96i}{625} = \dfrac{28}{625}+\dfrac{96}{625}i$

Correction 4

Rappels : Si $z = a+ib$, alors $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. Et il existe un réel θ tel que $\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
La notation exponentielle $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ vérifie les propriétés usuelles des puissances.
Par exemple, $\left(e^{ix}\right)^n = e^{inx}$, $e^{iax}\times e^{ibx} = e^{iax+ibx} = e^{i(a+b)x}$ et $\dfrac{e^{iax}}{e^{ibx}} = e^{i(a-b)x}$.
En particulier, si $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$ alors $z\times z' = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$, $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{\rho}{\rho'}e^{i(\theta-\theta')}$ et $z^k = \rho^k e^{ik\theta}$ pour tout entier k.

1. $|Z_1| = \sqrt{3^2+\left(\sqrt{27}\right)^2} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$

   $Z_1 = 6\left(\dfrac{3}{6}+\dfrac{3\sqrt{3}}{6}i\right) = 6\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 6\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = 6e^{i\dfrac{\pi}{3}}$

2. $\left|\sqrt{3}+i\right| = \sqrt{4} = 2$ $\left|1-i\sqrt{3}\right| = \sqrt{4} = 2$

   $\sqrt{3}+i = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = 2e^{i\pi/6}$.

   $1-i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{-i\pi/3}$

   $Z_2 = \dfrac{2e^{i\pi/6}}{2e^{-i\pi/3}} = \dfrac{e^{i\pi/6}}{e^{-i\pi/3}} = e^{i\frac{\pi}{6}-(-i\frac{\pi}{3})} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}(=i)$

3. $\left(1-i\sqrt{3}\right)^6 = \left(2e^{-i\pi/3}\right)^6 = 2^6e^{-i6\pi/3} = 2^6e^{-2i\pi} = 2^6$

   $(1+i)^5 = \left(\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^5 = \left(\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^5$

   $= \left(\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^5 = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^5 = (\sqrt{2})^5(e^{i\pi/4})^5 = 4\sqrt{2}e^{i5\pi/4}$

   $Z_3 = \dfrac{2^6}{2^2\sqrt{2}e^{i5\pi/4}} = 2^3\sqrt{2}\,e^{-5i\pi/4}$.

4. $Z_4 = e^{i\frac{\pi}{7}}e^{-i\frac{\pi}{3}}\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{84}}$

Correction 5

$1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $\sqrt{3}-i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.
Donc $z = \dfrac{\sqrt{2}^{2000}\times e^{-i\frac{2000\pi}{4}}}{2^{999}\times e^{-i\frac{999\pi}{6}}} = \dfrac{2^{1000}\times e^{-i500\pi}}{2^{999}e^{-i\frac{333\pi}{2}}} = 2\times\dfrac{1}{e^{-i\frac{\pi}{2}-166\pi}} = 2\times e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$.

Correction 6

1. • On cherche $z = a + ib$ tel que $z^2 = Z_1 = -3 + 4i$.
   On a $|Z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $|z^2| = |z|^2 = a^2 + b^2$ et $z^2 = a^2 - b^2 + 2ab\,i$.

   On en déduit le système suivant :

   $$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = 4 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \\ ab = 2 \end{cases}$$

   De l'équation $ab = 2$, on tire que a et b sont de même signe.

   On obtient alors :

   $$\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

   C'est-à-dire $z = 1 + 2i$ ou $z = -(1 + 2i)$

   • On cherche $z = a + ib$ tel que $z^2 = Z_2 = 24 - 70i$.
   On a $|Z_2| = \sqrt{24^2 + (-70)^2} = 74$, $|z^2| = |z|^2 = a^2 + b^2$ et $z^2 = a^2 - b^2 + 2ab\,i$.

   On en déduit le système suivant :

   $$\begin{cases} a^2 - b^2 = 24 \\ 2ab = -70 \\ a^2 + b^2 = 74 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 49 \\ b^2 = 25 \\ ab = -35 \end{cases}$$

   De l'équation $ab = -35$, on tire que a et b sont de signes opposés.

   On obtient alors :

   $$\begin{cases} a = -7 \\ b = 5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = 7 \\ b = -5 \end{cases}$$

   C'est-à-dire $z = 7 - 5i$ ou $z = -(7 - 5i)$

2. (a) $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1 = 1^2$
   $x_1 = \dfrac{5 - 1}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{5 + 1}{2} = 3$
   $S = \{2; 3\}$

   (b) $\Delta = 1 - 4 \times 1 \times 1 = -3 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$
   $x_1 = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$
   $S = \left\{\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right\}$

   (c) $\Delta = (4 - 3i)^2 - 4 \times 1 \times (1 - 5i) = 16 - 9 - 24i - 4 + 20i = 3 - 4i$
   $\Delta = (-1) \times (-3 + 4i) = i^2 \times (1 + 2i)^2 = [i \times (1 + 2i)]^2$
   $\Delta = (-2 + i)^2$
   $x_1 = \dfrac{-4 + 3i - (-2 + i)}{2} = -1 + i$
   $x_2 = \dfrac{-4 + 3i + (-2 + i)}{2} = -3 + 2i$
   $S = \{-1 + i; -3 + 2i\}$

(d) $\Delta = 3^2(-1+3i)^2 + 4 \times (1+2i) \times (8+i)$
$= 9 \times (-8-6i) + 4 \times (6+17i) = -48+14i$
On cherche $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = \Delta = -48 + 14i$.
On a $|\Delta| = \sqrt{(-48)^2 + (14)^2} = 50$, $|\delta^2| = |\delta|^2 = a^2 + b^2$ et $\delta^2 = a^2 - b^2 + 2ab\, i$.
On en déduit le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} a^2 - b^2 = -48 \\ 2ab = 14 \\ a^2 + b^2 = 50 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2 = 1 \\ b^2 = 49 \\ ab = 7 \end{array}\right.$$

De l'équation $ab = 7$, on tire que a et b sont de même signe.
On obtient alors :

$$\left\{\begin{array}{l} a = -1 \\ b = -7 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 7 \end{array}\right.$$

On a donc $\delta = 1 + 7i$ ou $\delta = -(1+7i)$
C'est-à-dire $\Delta = (1+7i)^2$.

$$x_1 = \frac{-3(-1+3i) - (1+7i)}{2\,(1+2i)} = \frac{2-16i}{2\,(1+2i)}$$
$$= \frac{(1-8i) \times (1-2i)}{(1+2i) \times (1-2i)} = \frac{-15-10i}{5} = -3-2i$$
$$x_2 = \frac{-3(-1+3i) + (1+7i)}{2\,(1+2i)} = \frac{4-2i}{2\,(1+2i)}$$
$$= \frac{(2-i) \times (1-2i)}{(1+2i) \times (1-2i)} = \frac{-5i}{5} = -i$$

$S = \{-i; -3-2i\}$

Correction 7

$z^2 + z + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$.

$$x_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \left\{\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right\}$$

$x^2 - (3+4i)x - 1 + 5i = 0$

$\Delta = (3+4i)^2 - 4 \times 1 \times (-1+5i)$
$= 9 - 16 + 24i + 4 - 20i = -3 + 4i = (1+2i)^2$

$$x_1 = \frac{(3+4i) - (1+2i)}{2} = 1 + i$$

$$x_2 = \frac{(3+4i) + (1+2i)}{2} = 2 + 3i$$

$S = \{1 + i; 2 + 3i\}$

Correction 8

z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$ c'est-à-dire $x^2 - (5-14i)x - 24 - 10i = 0$.
$\Delta = (5-14i)^2 + 96 + 40i = 25 - 196 - 140i + 96 + 40i = -75 - 100i = -25(3+4i)$.

On cherche $z = a + ib$ tel que $z^2 = 3 + 4i$.
On a $z^2 = a^2 - b^2 + 2ab$ et $|z|^2 = a^2 + b^2$.
Donc $a^2 - b^2 = 3$, $a^2 + b^2 = 5$ et $2ab = 4$.
C'est-à-dire ($a = 2$ et $b = 1$) ou ($a = -2$ et $b = -1$).
Donc $\Delta = (5i(2 + i))^2 = (-5 + 10i)^2$.
On obtient $z_1 = \dfrac{5 - 14i - (-5 + 10i)}{2} = 5 - 12i$ et $z_2 = \dfrac{5 - 14i + (-5 + 10i)}{2} = -2i$.