Université de Picardie Jules Verne

UFR d'économie et de gestion

Mathématiques

Licence 1 - Semestre 2

Exercices d'entrainement **Suites** **Corrigés**

Correction 1

$u_{n+1} = \dfrac{3}{2(n+1)+1} = \dfrac{3}{2n+3}$.

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2n+1}{2n+3} < 1$

Donc la suite est décroissante.

Correction 2

$u_{n+1} = 2(n+1)^2 - 1 = 2n^2 + 4n + 2 - 1$.

$u_{n+1} - u_n = (2n^2 + 4n + 1) - (2n^2 - 1) = 4n \geq 0$.

Donc la suite est croissante.

Correction 3

$u_{n+1} - u_n = 3u_n^2 - 2u_n + 1$.

On pose $X = u_n$ et on étudie le signe de $3X^2 - 2X + 1$.

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times 1 < 0$

Donc pour tout réel $3X^2 - 2X + 1 > 0$

La suite est croissante.

Correction 4

1. $\ell = \dfrac{1}{3}\ell + 2 \ \Leftrightarrow\ 2\ell = 6 \ \Leftrightarrow\ \ell = 3$.

   Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique de terme général $v_n = u_n - 3$.

   $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \dfrac{1}{3}u_n - 1 = \dfrac{1}{3}(u_n - 3) = \dfrac{1}{3}v_n$.

   Donc v est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = -2$

   On a donc $v_n = -\dfrac{2}{3^n}$ et $u_n = v_n + 3 = 3 - \dfrac{2}{3^n}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 3$

Correction 5

1. $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \dfrac{3}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n - u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) = \dfrac{1}{2}v_n.$

   Donc v est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_1 - u_0 = 1$

2. $v_n = \dfrac{1}{2^n}$

3. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k = v_0 \frac{1-q^n}{1-q} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$

4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = 2$

Correction 6

1. Par récurrence.
   - vrai au rang 0.
   - On suppose vrai au rang n i.e. $0 \leq u_n \leq 3$

   Donc $3 \leq 2u_n + 3 \leq 9$ et $0 \leq \sqrt{3} \leq \sqrt{2u_n + 3} \leq 3$

2. $\Delta = 16 = 4^2$ $X_1 = -1$ et $X_2 = 3$

   Donc $X^2 - 2X - 3 \leq 0$ si $-1 \leq X \leq 3$

3. On compare les carrés $u_{n+1}^2 = 2u_n + 3$ et u_n^2 (car u_n et u_{n+1} positifs).

   D'après la question précédente on obtient que $u_n^2 \leq u_{n+1}^2$ donc la suite est croissante.

4. La suite u est croissante majorée : elle est donc convergente.

   Si on pose $\ell = \displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$ alors ℓ vérifie $\ell = \sqrt{2\ell + 3}$ ou encore ℓ est racine du polynôme $X^2 - 2X - 3$.

   On en déduit que $\ell = 3$

Correction 7

1. En utilisant (P_1) $u_n = u_0 + n \times r$, on obtient :

   $u_3 = u_0 + 3r = 8$ et

   $u_{10} = u_0 + 10r = 29$

   En faisant la différence des termes, on obtient $7r = 21$ c'est-à-dire $r = 3$. Puis en remplaçant dans u_3, on obient $u_0 + 9 = 8$ soit $u_0 = -1$.

2. Grâce à (P_1), on a $u_{30} = u_0 + 30r = -1 + 90 = 89$

3. Grâce à (P_2) $S_n = (n+1) \times \left(u_0 + \dfrac{n}{2}r\right)$,

   on a $S_{30} = (30+1) \times \left(-1 + \frac{30}{2} \times 3\right) = 31 \times 44 = 1364$.

Correction 8

On applique la formule (P_2) $S_n = (n+1) \times \left(u_0 + \dfrac{n}{2}r\right)$

On obtient : $S_5 = 3 = (5+1) \times \left(-7 + \dfrac{5}{2} \times r\right)$.

C'est-à-dire $\dfrac{5}{2}r - 7 = \dfrac{3}{6}$.

D'où $\dfrac{5}{2}r = \dfrac{1}{2} + 7 = \dfrac{15}{2}$.

Et $5r = 15$ donc $r = 3$.

On applique la formule (P_1) $u_n = u_0 + n \times r$.

$u_{10} = u_0 + 10 \times r = -7 + 10 \times 3 = 23$

Correction 9

On applique la formule (P_3) $u_n = u_0 \times q^n$.

On obtient : $-96 = u_5 = 3 \times q^5$ soit $q^5 = -32$.

Donc $q = -2$.

On applique la formule (P_4) $S_n = u_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Et $S_6 = 3 \times \dfrac{1 - (-2)^7}{1 - (-2)} = 1 + 2^7 = 1 + 128 = 129$.

Correction 10

1. $u_7 = S_7 - S_6 = 384$
2. $S_9 - S_7 = u_8 + u_9 = u_7 \times q + u_8 \times q = u_7 \times q + u_7 \times q^2 = u_7(q + q^2)$

   Puisque $S_9 - S_7 = 3069 - 765 = 2304$, on obtient que $q^2 + q = \dfrac{2304}{384} = 6$.

   La raison q est solution de l'équation $X^2 + X - 6 = 0$.

   $\Delta = 25 = 5^2$, $X_1 = -3$ ou $X = 2$.

   On a donc deux solutions possibles :

   Si $q = -3$, alors $u_0 = \dfrac{u_7}{(-3)^7} = -\dfrac{384}{3^7} = -\dfrac{128}{3^6} = -\dfrac{2^7}{3^6}$

   Si $q = 2$, alors $u_0 = \dfrac{u_7}{2^7} = 3$

Correction 11

Il faut exprimer les données de l'exercice en termes de suite. Pour simplifier les calculs, on peut considérer comme unité la centaine d'euros.

Soit u la suite des coûts au mètre qui commencerait à l'indice 0. Autrement dit, u_0 est le coût du 1er mètre, u_1 est le coût du 2ème mètre, etc

u suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3,5 = \dfrac{7}{2}$ et de raison $r = 0,5 = \dfrac{1}{2}$

Le coût du n-ième mètre est :

$u_{n-1} = u_0 + (n-1)r = \dfrac{7+(n-1)}{2} = \dfrac{6+n}{2}$

Le coût pour creuser n mètres est :

$S_{n-1} = n \times \left(u_0 + \dfrac{n-1}{2}r\right) = n \times \left(\dfrac{7}{2} + \dfrac{n-1}{2} \times \dfrac{1}{2}\right)$

On réduit au même dénominateur et on obtient :

$S_{n-1} = \dfrac{n(13+n)}{4}$

On cherche donc le plus grand entier n possible tel que $\dfrac{n(13+n)}{4} \leq 218$

On multiplie par 4, on développe, on réduit et on ordonne.

Cela donne : $x^2 + 13x - 872 \leq 0$

$\Delta = 13^2 + 4 \times 872 = 3657 > 0$

Les racines sont donc :

$x_1 = \dfrac{-13-\sqrt{3657}}{2} \sim -36,73$ et $x_2 = \dfrac{-13+\sqrt{3657}}{2} \sim 23,73$

L'entier n doit être dans l'intervalle $[x_1; x_2]$ et le plus grand possible. Donc $n = 23$.

Correction 12

Il faut exprimer les données de l'exercice en termes de suite. Augmenter de 10% un nombre correspond à multiplier celui-ci par 1,1.

On appelle u la suite du nombre de véhicules par tranche horaire. Les indices de la suite correspondent à des horaires en respectant le tableau ci-dessous :

Horaire	Indice
17h00-17h20	0
17h20-17h40	1
17h40-18h00	2
18h00-18h20	3
18h20-18h40	4

18h40-19h00	5
19h00-19h20	6
19h20-19h40	7
19h40-20h00	8

Il s'agit d'une suite géométrique de premier terme 200 et de raison $1,1$.

Pour répondre à la première question, on doit calculer u_8 et, pour la deuxième, S_8.

u suite géométrique de premier terme $u_0 = 200$ et de raison $1,1$.

1. Calcul de u_8

   On utilise la propriété (P_3).

   On a $u_8 = 200 \times (1,1)^8 \sim 428$.

2. Calcul de S_8

   On utilise la propriété (P_4).

   $S_8 = 200 \times \dfrac{1-(1,1)^9}{1-1,1} \sim 2715$

Correction 13

On a $c_{n+1} = \dfrac{85}{100}c_n + 200$.

Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique.
Le premier terme est $c_0 = 1200$.

Rappel :
Dans le cas d'une suite u de premier terme u_0 et définie par la relation $u_{n+1} = au_n + b$ pour tout $n \geq 0$ avec $a \neq 1$. On pose $r = \dfrac{b}{1-a}$ et on a $u_n = a^n(u_0 - r) + r$.

Ici $a = \dfrac{85}{100} = \dfrac{17}{20}$ et $b = 200$.
On pose donc $r = \dfrac{200}{1 - \frac{17}{20}} = \dfrac{200}{\frac{3}{20}} = \dfrac{4000}{3}$.

$$\text{Et } c_n = \left(\frac{17}{20}\right)^n \left(1200 - \frac{4000}{3}\right) + \frac{4000}{3}$$
$$= \frac{4000}{3} - \frac{400}{3} \times \left(\frac{17}{20}\right)^n.$$

L'année 2020 correspond à $n = 14$.
Et enfin, $c_{14} = \dfrac{4000}{3} - \dfrac{400}{3} \times \left(\dfrac{17}{20}\right)^{14}$.
C'est-à-dire $c_{14} \sim 1319$.

Correction 14

1ère méthode

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+5}{n+2} - \frac{2n+3}{n+1} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$$

2ème méthode

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2n+5}{n+2}}{\frac{2n+3}{n+1}} = \frac{2n^2+7n+5}{2n^2+7n+6} = 1 - \frac{1}{2n^2+7n+6}$$

Donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

3ème méthode

On pose $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$.
f est dérivable sur $]-1; +\infty[$ donc sur $[0; +\infty[$.
$\forall x \in [0; +\infty[,\ f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} < 0$.

Correction 15

1. On va montrer en même temps que u est bien définie.
   Pour cela il faut que, pour tout entier n, on ait $u_n \geq -2$.
   On va donc montrer que, $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 2$.
   - Vrai au rang 1.
   - On suppose que $u_n \leq 2$. On a $u_n + 2 \leq 4$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \leq \sqrt{4} = 2$.

2. $x \mapsto x+2$ est croissante sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
   Donc $f(x) = \sqrt{x+2}$ est croissante sur $]-2;+\infty[$.
   $u_1 = \sqrt{u_0+2} = \sqrt{3} > u_0$.
   Donc u est croissante.
   Or u est majorée donc u est convergente.
   Sa limite est solution de $x = f(x)$ càd $x = \sqrt{2+x}$.
   On a $x \geq 0$ et $x^2 - x - 2 = 0$.
   $\Delta = 1+8 = 9 = 3^2$, $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$.
   Puisque $l \geq 0$, on obtient $l = 2$.

Correction 16

Soit R_n le montant qu'il reste à rembourser après n mois.
On a : $R_0 = S$
$R_1 = (1+t_m) \times R_0 - x$
$R_2 = (1+t_m) \times R_1 - x$
De façon générale, $R_{n+1} = (1+t_m) \times R_n - x$.
La suite de terme général R_n est une suite arithmético-géométrique.
Rappel : Dans le cas d'une suite u de premier terme u_0 et définie par la relation $u_{p+1} = au_p + b$ pour tout $p \geq 0$ avec $a \neq 1$.
On pose $r = \dfrac{b}{1-a}$ et on a $u_p = a^p(u_0 - r) + r$.
Ici $a = 1 + t_m$ et $b = -x$.
On pose donc $r = \dfrac{-x}{1-(1+t_m)} = \dfrac{x}{t_m}$ et on a $R_p = (1+t_m)^p \left(S - \dfrac{x}{t_m}\right) + \dfrac{x}{t_m}$.
Puisque $R_n = 0$, on obtient $(1+t_m)^n \left(S - \dfrac{x}{t_m}\right) + \dfrac{x}{t_m} = 0$.
Dans le cas où $n = 10$, on a $R_{10} = 0$.
Ce qui signifie que $(1+t_m)^{10}\left(10000 - \dfrac{1085}{t_m}\right) + \dfrac{1085}{t_m} = 0$.
Ou encore $10000 - \dfrac{1085}{t_m} + \dfrac{1085}{t_m}(1+t_m)^{-10} = 0$.

$$\begin{aligned}(1+t_m)^{-10} &= 1 - 10t_m + \frac{-10 \times (-11)}{2} t_m^2 + o(t_m^2).\\ &= 1 - 10t_m + 55t_m^2 + o(t_m^2)\end{aligned}$$

On remplace dans l'équation et on obtient :
$10000 - \dfrac{1085}{t_m} + \dfrac{1085}{t_m}(1 - 10t_m + 55t_m^2) = 0$.
Soit $-850 + 55 \times 1085 t_m = 0$.
D'où $t_m = \dfrac{850}{55 \times 1085} \sim 0,01424 \sim 1,42\%$.
Le taux annuel correspond à $(1+t_m)^{12} - 1$ soit environ 18%.