



Université de Picardie Jules Verne

UFR d'économie et de gestion

Statistiques

Licence 1 - Semestre 2

Exercices d'entraînement

Lois usuelles

Corrigés

Correction 1

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

2. Le nombre de codes possibles est $10^5 = 100\,000$ (de 00000 à 99999).

Une tentative de code est une épreuve de Bernoulli avec probabilité de succès $p = \frac{1}{10^5}$

Le nombre X d'essais avant l'ouverture de la porte suit la loi géométrique de paramètre p c'est-à-dire $X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{10^5}\right)$.

$$\text{Et, } \forall k \in \mathbb{N}^*, p(X=k) = (1-p)^{k-1}p = \left(\frac{9999}{10^5}\right)^{k-1} \times \frac{1}{10^5}.$$

3. $E(X) = \frac{1}{p} = 10^5$

$$V(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{\frac{9999}{10^5}}{10^{-10}} = \frac{9999}{10^5} \times 10^{10} = 999900000$$

4. La probabilité que l'alarme se déclenche est $p(X \geq 4) = \sum_{k=4}^{+\infty} p(X=k)$.

$$\text{On a aussi } p(X \geq 4) = 1 - p(X \leq 3) \text{ et } p(X \leq 3) = p(X=1) + p(X=2) + p(X=3).$$

$$\text{De façon générale, pour une loi géométrique on a : } \sum_{k=1}^r p(X=k) = \sum_{k=1}^r (1-p)^{k-1}p =$$

$$p \sum_{k=1}^r (1-p)^{k-1}$$

Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique, on a (voir le cours de première année) :

$$p \times \sum_{k=1}^r (1-p)^{k-1} = p \times \frac{1 - (1-p)^r}{1 - (1-p)} = p \times \frac{1 - (1-p)^r}{p} = 1 - (1-p)^r$$

$$\text{On a donc } p(X \geq 4) = 1 - p(X \leq 3) = 1 - (1 - (1-p)^3) = (1-p)^3 \approx 0,99997.$$

Correction 2

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
2. Chaque rendez-vous est une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès (oubli du rendez-vous) est $p = \frac{1}{5}$. La répétition des rendez-vous est donc un schéma de Bernoulli.

On reconnaît donc une loi géométrique de paramètre p c'est-à-dire $X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{5}\right)$.

Et, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a : $p(X=k) = (1-p)^{k-1}p = \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} \times \frac{1}{5}$.

3. $E(X) = \frac{1}{p} = 5$

$$V(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{25}} = \frac{4}{5} \times 25 = 20.$$

4. Rappel : $\sum_{i=0}^n t^i = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}$ et donc $\sum_{i=1}^n t^{i-1} = \frac{1-t^n}{1-t}$.

Si $x < 0$ alors $F(x) = 0$.

Et, pour tout entier $n \geq 1$, si $n \leq x < n+1$ alors :

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=1}^n p(X=k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^n \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{1}{5} \times \frac{1 - \frac{4^n}{5^n}}{\frac{1}{5}} = 1 - \frac{4^n}{5^n}. \end{aligned}$$

5. On cherche $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $F(k) \leq 0,3$.

$$F(k) \leq 0,3 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^k \leq 0,3 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^k \leq 1 - 0,3 = 0,7$$

$$\Leftrightarrow e^{k \ln \frac{4}{5}} \geq 0,7 \Leftrightarrow k(\ln 0,8) \geq \ln 0,7$$

$$\Leftrightarrow k \leq \frac{\ln 0,7}{\ln 0,8} \approx 1,59841$$

(attention au changement de sens de l'inéquation car $\ln 0,8$ est négatif)

$$\Leftrightarrow k \leq 1 \text{ (car la fonction de répartition est croissante)}$$

C'est-à-dire $k = 1$.

Correction 3

$$X \sim \mathcal{P}(3) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, p(X=n) = \frac{e^{-3}3^n}{n!}.$$

1. $p(X=0) = \frac{e^{-3}3^0}{0!} = e^{-3} = \frac{1}{e^3} \approx 0,049787$

2. $p(X \geq 2) = 1 - p(X \leq 1) = 1 - (p(X=0) + p(X=1)) = 1 - \left(e^{-3} + \frac{e^{-3} 3^1}{1!}\right)$
 $= 1 - 4e^{-3} \approx 0,80 = 80\%$.
3. (a) On peut raisonnablement considérer que les semaines sont indépendantes du point de vue accidents donc Y suit une loi de Poisson de paramètre $4 \times 3 = 12$.
 (b) $p(Y > 5) = 1 - p(Y \leq 5)$
 D'après le tableau de la fonction de répartition de la loi de Poisson, on a $p(Y \leq 5) \approx 0,0203$. Donc $p(Y > 5) \approx 0,9797$.
4. (a) On a $p(Z=k) = \frac{e^{-m} m^k}{k!}$ et $p(Z=0) = 0,85 = e^{-m}$.
 Donc $m = -\ln 0,85 \approx 0,162518929$
 (b) $p(Z < 3) = p(Z=0) + p(Z=1) + p(Z=2)$
 $= e^{-m} + e^{-m} \frac{m^1}{1!} + e^{-m} \frac{m^2}{2!} = e^{-m} (1 + m + \frac{1}{2} m^2)$
 $\approx 0,85(1 + 0,162518929 + 0,013206201) \approx 0,999366361$.

Correction 4

1. On a donc $p(X=0) = 0,135 = e^{-\lambda}$ d'où $\lambda = -\ln(0,135) \approx 2,00240$ soit $\lambda \approx 2$.
 2. On veut $p(X \geq 4) = 1 - p(X \leq 3) \approx 1 - 0,8571 = 0,1429$

Correction 5

1. (a) $X(\Omega) = \llbracket 0; 1000 \rrbracket$.
 (b) C'est le schéma théorique de la loi hypergéométrique de paramètres $N = 200\,000$, $n = 1\,000$ et $p = 5\% = \frac{5}{100} = 0,05$ c'est-à-dire $X \sim \mathcal{H}(200\,000; 1\,000; 0,05)$.
 De plus, $0,05 \times 200\,000 = 10\,000$ et $200\,000 - 10\,000 = 190\,000$.
 $\forall k \in X(\Omega), p(X=k) = \frac{\binom{10\,000}{k} \times \binom{190\,000}{1\,000-k}}{\binom{200\,000}{1\,000}}$.
 (c) $E(X) = np = 50$
 $V(X) = np(1-p) \frac{N-n}{N-1} = npq \frac{N-n}{N-1} = 5 \times \frac{95}{100} \times \frac{199\,000}{199\,999} \approx 4,72627$.
2. (a) On a $p(Y=0) = \frac{18\,140}{200\,000} = 0,0907 = e^{-\lambda}$.
 Par lecture de la table de la loi de Poisson, on trouve $\lambda = 2,4$.
 (b) On cherche $p(X \geq 5) = 1 - p(X < 4) = 1 - p(X \leq 4)$.
 D'après le tableau, $p(X \leq 4) \approx 0,9041$
 Et donc $p(X \geq 5) = 1 - 0,9041 = 0,0959 \approx 9,6\%$.

Correction 6

1. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 500\,000$ et $p = \frac{1}{100\,000} = 0,00001$ qui est approximable par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 5$ car $p < 0,1$, $n > 30$ et $np = 5 < 15$.
 2. $p(X > 10) = 1 - p(X \leq 10) \approx 1 - 0,9863 = 0,0137$.