Université de Picardie Jules Verne

UFR d'économie et de gestion

Statistiques

Licence 1 - Semestre 2

Exercices d'entrainement **Probabilités conditionnelles** **Corrigés**

Correction 1

On note :
H l'événement "l'individu choisi est un homme".
F l'événement "l'individu choisi est une femme".
C l'événement "l'individu choisi possède le caractère C".
D'après l'énoncé, on a $\overline{H} = F$.
On cherche $p(H)_{|C} = \dfrac{p(H \cap C)}{p(C)}$.
On a $\mathrm{p}(H \cap C) = p(C)_{|H} \times p(H) = \dfrac{75}{100} \times \dfrac{4}{11}$.
Puisque (H, F) forment un système complet d'événements, on a :
$p(C) = p(C \cap H) + p(C \cap F) = p(C)_{|H} \times p(H) + p(C)_{|F} \times p(F) = \dfrac{75}{100} \times \dfrac{4}{11} + \dfrac{65}{100} \times \dfrac{7}{11}$
D'où $p(H)_{|C} = \dfrac{75 \times 4}{75 \times 4 + 65 \times 7} = \dfrac{60}{151} \approx 0,4.$

Correction 2

C'est une situation d'équiprobabilité. On note :

T_i l'événement "on a ouvert le i-ème tiroir".
V l'événement "la chemise prise est verte".
R l'événement "la chemise prise est verte".
(V, R) forment un système complet d'événements et, plus précisemment, $R = \overline{V}$.
$(T_i)_{i=1,2,3,4}$ forment aussi un système complet d'événements.
On cherche $p(T_1)_{|V} = \dfrac{p(T_1 \cap V)}{p(V)}$.

$$\begin{aligned} p(V) &= p(V \cap T_1) + p(V \cap T_2) + p(V \cap T_3) + p(V \cap T_4) \\ &= p(V)_{|T_1} \times p(T_1) + p(V)_{|T_2} \times p(T_2) + p(V)_{|T_3} \times p(T_3) + p(V)_{|T_4} \times p(T_4). \\ &= \frac{5}{9} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{9} \times \frac{1}{4} + \frac{6}{9} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{9} \times \frac{1}{4} = \frac{16}{9} \times \frac{1}{4} = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

En particulier, $p(V \cap T_1) = p(V)_{|T_1} \times p(T_1) = \dfrac{5}{9} \times 14.$

D'où $p(T_1)_{|V} = \dfrac{p(T_1 \cap V)}{p(V)} = \dfrac{\frac{5}{9} \times 14}{\frac{4}{9}} = \dfrac{5}{16} = 0,3125.$

Correction 3

Soient les événements suivants :

S : la personne choisie est une secrétaire.
C : la personne choisie est un comptable.
R : la personne choisie est un responsable.
E : Le travail contient au moins une erreur.

1. (S, C, R) est un système complet d'événements.
   $p(E) = p(E \cap S) + p(E \cap C) + p(E \cap R)$
   $= p(E)_{|S} \times p(S) + p(E)_{|C} \times p(C) + p(E)_{|R} \times p(R)$
   $= 0,15 \times \frac{12}{20} + 0,20 \times \frac{6}{20} + 0,30 \times \frac{2}{20} = 0,18.$
2. $p(R)_{|E} = \frac{p(E \cap R)}{p(E)} = \frac{p(E)_{|R} \times p(R)}{p(E)} = \frac{0,03}{0,18} = \frac{1}{6} \approx 0,1666667$

Correction 4

1. A et B indépendants signifie que $p(A)_{|B} = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = p(A)$.
   Autrement dit, $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.
   (a) B et $\overline{B}$ forment un système complet d'événements.
   Donc $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})$
   On obtient donc $p(A) = p(A) \times p(B) + p(A \cap \overline{B})$.
   Puis $p(A) - p(A) \times p(B) = p(A \cap \overline{B})$.
   Ou encore $p(A)(1 - p(B)) = p(A \cap \overline{B})$.
   Et donc $p(A)p(\overline{B}) = p(A \cap \overline{B})$.
   Ce qui signifie que A et $\overline{B}$ sont indépendants.
   (b) Par symétrie (ou en utiisant le même type de raisonnement), on trouve que $\overline{A}$ et B.
   Puis en utilisant la question 1 avec $\overline{A}$ au lieu de A, on trouve le résultat demandé.
2. (a) $p(E_1) = p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = \frac{4}{5} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{10}$.
   (b) $p(E_2) = p(A \setminus B) = p(A) - p(A \cap B)$
   Ou encore $p(E_2) = p(A \cap \overline{B}) = p(A) \times p(\overline{B}) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{10}$.
   (c) $p(E_3) = p(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{40}$.
   (d) $p(E_4) = 1 - p(E_3) = \frac{39}{40}$.
   (e) $p(E_5) = p(A \setminus B) + p(B \setminus A) = p(A) \times p(\overline{B}) + p(B) \times p(\overline{A}) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{5} \times \frac{7}{8} = \frac{11}{40}$.

Correction 5

1. $p(A) = \dfrac{1}{2}$, $p(B) = \dfrac{1}{2}$ et $p(C) = \dfrac{1}{2}$.

   $p(A \cup B) = \dfrac{1}{4} = p(A) \times p(B)$: A et B sont indépendants.
   $p(A \cup C) = \dfrac{1}{4} = p(A) \times p(C)$: A et C sont indépendants.
   $p(B \cup C) = \dfrac{1}{4} = p(B) \times p(C)$: A et C sont indépendants.

2. $p(A \cap B \cap C) = \dfrac{1}{4} \neq \dfrac{1}{8} = p(A) \times p(B) \times p(C)$.
   Les événements A, B et C sont deux à deux indépendants. Mais ils ne sont pas mutuellement indépendants.

Correction 6

1. D'après l'énoncé $p(E_{n+1})_{|E_n} = \dfrac{1}{10}$ et $p(E_{n+1})_{|\overline{E_n}} = \dfrac{4}{10}$.

2. $(E_n, \overline{E_n})$ est un système complet d'évenements.
   $p_{n+1} = p(E_{n+1})_{|E_n} \times p(E_n) p(E_{n+1})_{|\overline{E_n}} \times p(\overline{E_n}) = \dfrac{1}{10} p_n + \dfrac{4}{10}(1 - p_n) = \dfrac{4}{10} - \dfrac{3}{10} p_n$

3. Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique.
   On pose $a = \dfrac{\dfrac{4}{10}}{1 + \dfrac{3}{10}} = \dfrac{4}{13}$.
   On a $p_n = a^{n-1}(p_1 - a) + a = \left(\dfrac{4}{13}\right)^{n-1} \left(p_1 - \dfrac{4}{13}\right) + \dfrac{4}{13}$.

4. Puisque $0 < a < 1$, on a $\lim\limits_{n \to \infty} a^{n-1} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to \infty} p_n = a = \dfrac{4}{13}$.