Université de Picardie Jules Verne

UFR d'économie et de gestion

Statistiques

Licence 1 - Semestre 2

Exercices d'entrainement **Variables aléatoires discrètes** **Corrigés**

Correction 1

C'est une situation d'équiprobabilité.
On obtient les probabilités par la fraction $\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total}}$.
Le nombre de cas total est $\binom{5}{3} = 10$.

1. $X(\Omega) = [\![1;3]\!]$ (attention : il y a au minimum une boule rouge)

2. $p_1 = p(X{=}1) = \dfrac{\binom{3}{1} \times \binom{2}{2}}{\binom{5}{3}} = \dfrac{3}{10}$.

   $p_2 = p(X{=}2) = \dfrac{\binom{3}{2} \times \binom{1}{2}}{\binom{5}{3}} = \dfrac{6}{10}$.

   $p_3 = p(X{=}3) = \dfrac{\binom{3}{3}}{\binom{5}{3}} = \dfrac{1}{10}$.

   On remarquera que l'on a bien $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

3. $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} x_i p_i = 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{6}{10} + 3 \times \frac{1}{10} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$.

   $E(X^2) = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} x_i^2 p_i = 1 \times \frac{3}{10} + 4 \times \frac{6}{10} + 9 \times \frac{1}{10} = \frac{36}{10} = \frac{18}{5}$.

   $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \dfrac{18 \times 5}{5 \times 5} - \dfrac{9 \times 9}{5 \times 5} = \dfrac{9}{25}$.

Correction 2

1. (a) Soient les événements A : "les 2 boules tirées sont de même couleur", B : "les 2 boules tirées sont vertes" et C : "les 2 boules tirées sont blanches".

   On a $p(A) = p(B) + p(C) = \dfrac{\binom{6}{2}}{\binom{9}{2}} + \dfrac{\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}} = \dfrac{15}{36} + \dfrac{3}{36} = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$.

   (b) La probabilité d'avoir 2 boules de couleur différentes est l'événement contraire de A est alors de $1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

2. (a) Les valeurs prises par X sont -2 et 5 c'est-à-dire $X(\Omega) = \{-2; 5\}$.

$$p(X{=}5) = p(A) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{n+6}{2}} + \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n+6}{2}} = \left(15 + \frac{n(n-1)}{2}\right) \times \frac{2}{(n+6)(n+2)}.$$
$$= \frac{30 + n(n-1)}{(n+6)(n+2)}.$$
$$p(X{=}-2) = \frac{\binom{6}{1} \times \binom{n}{1}}{\binom{n+6}{2}} = \frac{12n}{(n+6)(n+2)} (= 1 - p(A))$$

(b) $E(X) = (-2)p(X{=}-2) + 5p(X{=}5)$
$$= (-2)\frac{12n}{(n+6)(n+2)} + 5\frac{30 + n(n-1)}{(n+6)(n+2)}$$
$$= \frac{-24n + 150 + 5n^2 - 5n}{(n+6)(n+2)}$$
$$= \frac{5n^2 - 29n + 150}{(n+6)(n+2)}$$

Correction 3

1. Parmi les 27 petits cubes obtenus, il y en a 8 qui ont 3 faces peintes (les 8 "coins"). Il y en a 12 qui ont 2 faces peintes. Il y en a 6 qui ont une face peinte. Il en reste 1 qui n'a aucune face peinte (celui au centre du cube).

   On a donc $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

2. Du fait de l'équiprobabilité, on a le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$p_i = p(X{=}x_i)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$

   On a bien $\displaystyle\sum_{i=0}^{3} p_i = \frac{1}{27} + \frac{6}{27} + \frac{12}{27} + \frac{8}{27} = \frac{27}{27} = 1.$

3. $E(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} x_i p_i = 0 \times \frac{1}{27} + 1 \times \frac{6}{27} + 2 \times \frac{12}{27} + 3 \times \frac{8}{27} = \frac{6}{27} + \frac{24}{27} + \frac{24}{27} = \frac{54}{27} = 2$

4. $E(X^2) = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} x_i^2 p_i = 0 \times \frac{1}{27} + 1 \times \frac{6}{27} + 4 \times \frac{12}{27} + 9 \times \frac{8}{27} = \frac{6}{27} + \frac{48}{27} + \frac{72}{27} = \frac{126}{27} = \frac{14}{3}$

   $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \dfrac{14}{3} - 4 = \dfrac{1}{3}$

Correction 4

On a $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$.
Soit $x = p(X = 0)$, $y = p(X = 1)$ et $z = p(X = 2)$.
En particulier, $x + y + z = 1$ ($Equation\,1$).

De plus, $E(X) = 0 \times x + 1 \times y + 2 \times z = y + 2z = 1$ ($Equation\, 2$).
Et $V(x) = E(X^2) - E(X)^2 = 0^2 \times x + 1^2 \times y + 2^2 \times z - 1^2 = y + 4z - 1 = 0,5$ ($Equation\, 3$).
On obtient donc le système :

$$\left\{\begin{array}{rcll} x+y+z & = & 1 & \\ y+2z & = & 1 & \\ y+4z & = & 1,5 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0,25 \\ y & = & 0,5 \\ z & = & 0,25 \end{array}\right.$$

Correction 5

C'est une situation d'équiprobabilité.
On obtient les probabilités par la fraction $\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total}}$.
Le nombre de cas total est $\binom{11}{5} = 462$.

1. $X(\Omega) = [\![0;4]\!]$ (attention, il y a au moins un homme)

2. $p_0 = p(X{=}0) = \dfrac{\binom{7}{5}}{\binom{11}{5}} = \dfrac{3}{66}$

   $p_1 = p(X{=}1) = \dfrac{\binom{4}{1}\binom{7}{4}}{\binom{11}{5}} = \dfrac{20}{66}$

   $p_2 = p(X{=}2) = \dfrac{\binom{4}{2}\binom{7}{3}}{\binom{11}{5}} = \dfrac{30}{66}$

   $p_3 = p(X{=}3) = \dfrac{\binom{4}{3}\binom{7}{2}}{\binom{11}{5}} = \dfrac{12}{66}$

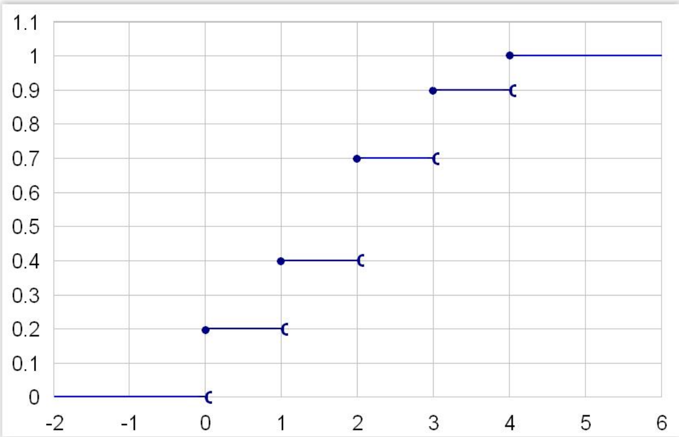
   $p_4 = p(X{=}4) = \dfrac{\binom{4}{4}\binom{7}{1}}{\binom{11}{5}} = \dfrac{1}{66}$

3. $E(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{4} x_i p_i = \dfrac{120}{66} = \dfrac{20}{11} \approx 1,82$

Correction 6

1. $$\begin{array}{lll} F(x) = 0 & \text{si} & x < 0 \\ F(x) = 0,2 & \text{si} & 0 \leq x < 1 \\ F(x) = 0,4 & \text{si} & 1 \leq x < 2 \\ F(x) = 0,7 & \text{si} & 2 \leq x < 3 \\ F(x) = 0,9 & \text{si} & 3 \leq x < 4 \\ F(x) = 1 & \text{si} & 4 \leq x \end{array}$$

   Dont la courbe est :



2.

x_i	0	1	2	3	4	Total
$p_i = p(X{=}x_i)$	$0,2$	$0,2$	$0,3$	$0,2$	$0,1$	1
$x_i p_i$	0	$0,2$	$0,6$	$0,6$	$0,4$	$1,8$
$x_i p_i^2$	0	$0,2$	$1,2$	$1,8$	$1,6$	$4,8$

D'où $E(X) = 1,8$ et $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 4,8 - 1,8^2 = 1,56$.

3.

x_i	0	1	2	3	4
y_i	-4	1	6	11	16
$p'_i = p(Y{=}y_i)$	$0,2$	$0,2$	$0,3$	$0,2$	$0,1$
$y_i p'_i$	$-0,8$	$0,2$	$1,8$	$2,2$	$1,6$

D'où $E(Y) = 5$ et donc le bénéfice moyen est de 5 euros.