



Université de Picardie Jules Verne
UFR d'économie et de gestion

Mathématiques

Licence 2 - Semestre 3

Exercices d'entraînement

Calcul matriciel

Corrigés

Correction 1

(a) La matrice A est déjà échelonnée. Donc $\text{rg}(A) = 2$.

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -7 & -35 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + 7L_1$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où $\text{rg}(B) = \text{rg}(B_1) = 1$.

(c) $C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \\ 9 & 5 & -3 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow 5L_2 + 2L_1; L_3 \leftarrow 5L_3 - 9L_1$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 0 & 8 & -12 \\ 0 & 34 & -51 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2; L_3 \leftarrow \frac{1}{17}L_3$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où $\text{rg}(C) = \text{rg}(C_3) = 2$.

(d) $D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 7 & -7 & 3 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1; L_3 \leftarrow L_3 + 7L_1$

$$D_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & -14 & 1 \\ 0 & 21 & -42 & 3 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & -14 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où $\text{rg}(D) = \text{rg}(D_2) = 2$.

$$(e) \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1; L_4 \leftarrow L_4 - L_1$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 5 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2; L_4 \leftarrow L_4 + 4L_2$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -10 & -13 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \end{pmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 - L_3$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -10 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Donc $\text{rg}(E) = \text{rg}(E_3) = 4$.

$$(f) \quad F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ -2 & 5 & 5 & -4 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1; L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1; L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2; L_4 \leftarrow L_4 + L_2$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où $\text{rg}(F) = \text{rg}(F_2) = 3$.

Correction 2

$$1. \quad 2A - 3B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$2. \quad B + C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \times (B + C) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \times C = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A \times B + A \times C = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Correction 3

- (a)
- M
- est une matrice
- 2×3
- et
- P
- est une matrice
- 2×2
- .

On ne peut pas multiplier M par P mais on peut multiplier P par M .

Le résultat sera une matrice 2×3 .

$$P \times M = \begin{pmatrix} -4 & 15 & 31 \\ -6 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

- (b)
- M
- est une matrice
- 3×1
- et
- P
- est une matrice
- 1×3
- .

On peut multiplier M par P et P par M .

$M \times P$ sera une matrice 3×3 .

$P \times M$ sera une matrice 1×1 .

$$M \times P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P \times M = (6)$$

- (c)
- M
- est une matrice
- 3×4
- et
- P
- est une matrice
- 4×3
- .

On peut multiplier M par P et P par M .

$M \times P$ sera une matrice 3×3 .

$P \times M$ sera une matrice 4×4 .

$$M \times P = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 3 \\ 6 & 15 & 9 \\ 0 & -9 & 9 \end{pmatrix}$$

$$P \times M = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 16 & 4 \\ 2 & 2 & -14 & -6 \\ 1 & 11 & 23 & 7 \\ 1 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Correction 4

$$A \times I_2 = A = I_2 \times A \text{ et } B \times I_3 = B = I_3 \times B.$$

Correction 5

$$1. A + B = B + A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}.$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 15 \end{pmatrix}.$$

$$2. (A + B) \times (A + B) = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 0 & 49 \end{pmatrix}.$$

$$A \times A = \begin{pmatrix} -2 & 15 \\ -5 & 13 \end{pmatrix}.$$

$$B \times B = \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$3. A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 15 \\ -5 & 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 4 & 28 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 19 \\ 4 & 48 \end{pmatrix} \neq (A+B)^2.$$

$$4. (A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

Mais AB peut être différent de BA .

Correction 6

$$A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B \times A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 4 & -8 & 4 \\ 6 & -12 & 6 \end{pmatrix}.$$

On peut donc avoir $A \times B = 0$ sans qu'aucune des matrices A et B ne soit nulle.

Correction 7

$$\text{Réponse : } \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & -8 \\ -2 & 4 & -4 & -4 \\ 6 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

Correction 8

$$\text{Posons } X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

$$AX = \begin{pmatrix} a+5c & b+5d \\ -4a+c & -4b+d \end{pmatrix}$$

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{cases} a+5c = -6 \\ -4a+c = 3 \\ b+5d = 3 \\ -4b+d = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+5c = -6 \\ 21c = -21 \\ b+5d = 3 \\ 21d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ c = -1 \\ b = 4/3 \\ d = 1/3 \end{cases}.$$

$$\text{D'où } X = \begin{pmatrix} -1 & 4/3 \\ -1 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Correction 9

Puisque A est une matrice 2×2 et B est une matrice 2×1 , X est nécessairement une matrice 2×1 .

$$\text{On pose donc } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$\text{La matrice } A \text{ est inversible et } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{L'équation devient } X = A^{-1} \times B \text{ dont le calcul donne } \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ soit } x = -2 \text{ et } y = 4.$$

Correction 10

$$A^2 = I_3 \text{ donc } A^{-1} = A.$$

Correction 11

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & \vdots & 1 & 0 \\ 3 & 5 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \vdots & 10 & -6 \\ 0 & 1 & \vdots & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 5 & -3 \\ 0 & 1 & \vdots & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & \vdots & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & \vdots & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow -L_2 + 3L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1; L_3 \leftarrow L_3 + L_1; L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \vdots & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & \vdots & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2; L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2 \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \vdots & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & \vdots & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & \vdots & -4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_4 \leftarrow L_4 - 3L_3 \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \vdots & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & \vdots & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \vdots & 5 & -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_4; L_2 \leftarrow L_2 + L_4; L_1 \leftarrow L_1 + L_4 \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & \vdots & 6 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \vdots & 3 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \vdots & 7 & -4 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \vdots & 5 & -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 + 2L_2 - \frac{1}{2}L_3; L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 &\leftarrow \frac{1}{2}L_3; L_4 \leftarrow -L_4 \end{aligned} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 17/2 & -5 & -13/2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & -3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 7/2 & -2 & -5/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & -5 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \\
 & \text{D'où } C^{-1} = \begin{pmatrix} 17/2 & -5 & -13/2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -1 \\ 7/2 & -2 & -5/2 & 1 \\ -5 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$