Université de Picardie Jules Verne

UFR d'économie et de gestion

Mathématiques

Licence 2 - Semestre 3

Exercices d'entrainement **Déterminants et matrices** **Corrigés**

Correction 1

$$a = \begin{vmatrix} 112 & 127 \\ 97 & 110 \end{vmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$
$$= \begin{vmatrix} 15 & 17 \\ 97 & 110 \end{vmatrix} C_2 \leftarrow C_2 - C_1$$
$$= \begin{vmatrix} 15 & 2 \\ 97 & 13 \end{vmatrix} C_1 \leftarrow C_1 - 6C_2$$
$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 19 & 13 \end{vmatrix} = 39 - 38 = 1$$

$$b = \begin{vmatrix} 66 & 106 \\ 41 & 66 \end{vmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$
$$= \begin{vmatrix} 25 & 40 \\ 41 & 66 \end{vmatrix}$$
$$= 5 \times \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 41 & 66 \end{vmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 8L_1$$
$$= 5 \times \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \times (10 - 2) = 10.$$

$$c = \begin{vmatrix} 92 & 72 \\ 74 & 59 \end{vmatrix}$$
$$= 4 \times \begin{vmatrix} 23 & 18 \\ 74 & 59 \end{vmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$$
$$= 4 \times \begin{vmatrix} 23 & 18 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2$$
$$= 4 \times \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 4 \times (15 + 10) = 100$$

Correction 2

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -9 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -11 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 55.$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} -1+i & 1-i & -1 \\ 1-2i & -1+i & -i \\ 2-i & 0 & 1-i \end{vmatrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$
$$= \begin{vmatrix} -1+i & 1-i & -1 \\ -i & 0 & -1-i \\ 2-i & 0 & 1-i \end{vmatrix}$$
$$= -(1-i) \begin{vmatrix} -i & -1-i \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2+2i$$

Correction 3

$L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_1 \\ C_5 \leftarrow C_5 - C_1 \end{array}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & -3 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & -3 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 15 \times \begin{vmatrix} -4 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$C_1 \leftarrow C_1 + C_4$

$$\Delta = 15 \times \begin{vmatrix} -5 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 15 \times (-5) \times \begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$$\Delta = 15 \times (-5) \times \begin{vmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 15 \times (-5) \times (-5) \times 5 = 1875$$

Correction 4

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -8 & -2 & -6 & -5 \\ 1 & -4 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & -6 & 7 & -1 & -4 \\ -4 & 16 & -8 & \lambda & 5 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 3 \times L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 4 \times L_1 \end{array}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 8 & 2 & -3 \\ 0 & 8 & -12 & \lambda - 12 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 2 & -2 \\ -4 & 8 & 2 & -3 \\ 8 & -12 & \lambda - 12 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2 \times L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 4 \times L_1 \end{array}$$

$$\det(A) = -\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & -8 & \lambda & -7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -4 & 1 \\ -8 & \lambda & -7 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3\times L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4\times L_1 \end{array}$$

$$\det(A) = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & \lambda-4 & -7 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \lambda-4 & -7 \end{vmatrix} = 4\times(7+4-\lambda) = 4\times(11-\lambda)$$

La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul c'est-à-dire $\lambda \neq 11$.

Correction 5

$\mathrm{tr}\,(A) = 3 + a - 4 = a - 1$

$\mathrm{tr}\,(A) = 3 \;\Leftrightarrow\; a - 1 = 3 \;\Leftrightarrow\; a = 4.$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ b & -2 & -4 \end{vmatrix} \; L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1; L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \\ b-3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 2\times(-25 - 4b + 12) = -8b - 26$$

$\det A = -50 \;\Leftrightarrow\; -8b - 26 = -50 \;\Leftrightarrow\; b = 3$

Correction 6

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & 7 & -11 \\ -2 & -2 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -8 & 17 \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \text{ donc } A \text{ est bien inversible.}$$

$$\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 7 & -11 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & -11 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 7 & -11 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & -11 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 43 & 20 \\ 11 & 17 & 8 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t\mathrm{Com}(A) = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 27 & 11 & -2 \\ 43 & 17 & -4 \\ 20 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Correction 7

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 4 & -14 & -4 \\ 2 & -12 & 11 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -6 & 15 \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \text{ donc } A \text{ est bien inversible.}$$

$$\text{Com}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -14 & -4 \\ -12 & 11 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -14 \\ 2 & -12 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -12 & 11 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -12 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -14 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -14 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -202 & -52 & -20 \\ 57 & 15 & 6 \\ -16 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t\text{Com}(A) = \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} -202 & 57 & -16 \\ -52 & 15 & -4 \\ -20 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Correction 8

1. $\det M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -2 & -3 & 8 \\ 3 & 4 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$

   $\det M \neq 0$ donc M est inversible.

2. On a $M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Le système est équivalent à $MX = B$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

   Donc $X = M^{-1} \times B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   D'où $S = \{(1; 5; 2)\}$.

Correction 9

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ et $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$.

2. On subodore que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

   - Vrai aux rangs 0, 1, 2, 3 et 4.
   - On suppose vrai au rang n.

   $A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 + 2 \times (2^n - 1) \\ 0 & 2 \times 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} - 1 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$.

   Donc vrai au rang $n + 1$.

3. Si on applique la formule pour $n = -1$, on obtient une matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

   On a $A \times B = I_2$ donc la formule fonctionne aussi pour $n = -1$.

Correction 10

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 2 & -2 \\ 2/3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

   $A^3 = 0$

2. $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   $B^4 = 0$

Correction 11

1. $N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ on pose donc $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Puisque $D = 2I$ et que I commute avec toute matrice, on a $ED = DE$.

3. (a) $D^2 = 4I$, $D^3 = 8I$ et $D^4 = 16I$.

   $E^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E^3 = 0$ et $E^4 = 0$.

   (b) $N^2 = (D+E)^2 = D^2 + 2DE + E^2 = 4I + 4E + E^2 = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

   $N^3 = (D+E)^3 = D^3 + 3D^2E + 3DE^2 + E^3 = 8I + 12E + 6E^2 = \begin{pmatrix} 8 & 24 & 12 \\ 0 & 8 & 24 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

   $N^4 = (D+E)^4 = D^4 + 4D^3E + 6D^2E^2 + 4DE^3 + E^4 = 16I + 32E + 24E^2 = \begin{pmatrix} 16 & 64 & 64 \\ 0 & 16 & 64 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

   (c) On a $D^n = 2^n I$ pour tout entier n et $E^n = 0$ dès que $n \geq 3$.

   $N^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D^{n-k} E^k = D^n + nD^{n-1}E + \frac{n(n-1)}{2} D^{n-2}E^2 = 2nI + n2n - 1E + n(n-1)2n - 3E^2$

   $= \begin{pmatrix} 2^n & n2^n & n(n-2)2^{n-1} \\ 0 & 2^n & n2^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

4. (a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ donc P est inversible.

   (b) $P^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

5. (a) $P^{-1}NP = M$.

   (b) $M^2 = (P^{-1}NP)(P^{-1}NP) = P^{-1}N2P$

   Et $M^n = P^{-1}N^nP$ (démonstration par récurrence)