Université de Picardie Jules Verne

UFR d'économie et de gestion

Mathématiques

Licence 2 - Semestre 3

Exercices d'entrainement **Diagonalisation** **Corrigés**

Correction 1

$$\tilde{\pi}_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} -3-X & 2 & -4 \\ 4 & -3-X & 4 \\ 2 & -3 & 5-X \end{vmatrix} \; C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2$$

$$= \begin{vmatrix} -3-X & 2 & 0 \\ 4 & -3-X & -2-2X \\ 2 & -3 & -1-X \end{vmatrix} \; L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$$

$$= \begin{vmatrix} -3-X & 2 & 0 \\ 0 & 3-X & 0 \\ 2 & -3 & -1-X \end{vmatrix}$$

$$= (-1-X) \times \begin{vmatrix} -3-X & 2 \\ 0 & 3-X \end{vmatrix}$$

$$= (-1-X)(-3-X)(3-X)$$

Les valeurs propres de A sont les racines de $\tilde{\pi}_A$ c'est-à-dire $\lambda_2 = -3$, $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_3 = 3$.
En particulier, on a $\mathrm{Sp}\,(A) = \{-1; 0; 1\}$.
Ce sont toutes les trois des valeurs propres simples. La matrice est donc diagonalisable. De plus, tous les sous-espaces propres seront de dimension 1. Il suffira donc à chaque fois de trouver un vecteur non nul de l'espace pour qu'il en soit une base.

- $\lambda_1 = -3$

L'espace propre associé à $\lambda_1 = -3$ est $E_{-3} = \{U \in \mathbb{R}^3 \mid A \times U = -U\}$.
Autrement dit, si on pose $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a $U \in E_{-3} \iff A \times U = -3.U = \begin{pmatrix} -3x \\ -3y \\ -3z \end{pmatrix}$.
On doit donc résoudre le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -3x & + & 2y & - & 4z & = & -3x \\ 4x & - & 3y & + & 4z & = & -3y \\ 2x & - & 3y & + & 5z & = & -3z \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} & & 2y & - & 4z & = & 0 \\ 4x & & & + & 4z & = & 0 \\ 2x & - & 3y & + & 8z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & -z \\ y & = & 2z \end{array} \right.$$

Donc $E_{-3} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -z \,\text{et}\, y = 2z\}$.
Ou encore $E_{-3} = \{(-z, 2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z.(-1, 2, 1)) \mid z \in \mathbb{R}\}$.
Si on pose $u_1 = (-1, 2, 1))$, on obtient que $E_{-3} = \{z.u_1 \mid z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(u_1)$. Ce qui signifie

que la famille $\{u_1\}$ est génératrice de E_{-3}. Puisque $u_1 \neq 0$, la famille $\{u_1\}$ est libre et c'est une base de E_{-3}.

• $\lambda_2 = -1$
L'espace propre associé à $\lambda_2 = -1$ est $E_{-1} = \{U \in \mathbb{R}^3 \mid A \times U = -U\}$.
Autrement dit, si on pose $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a $U \in E_{-1} \Leftrightarrow A \times U = -1.U = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$.
On doit donc résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -3x & + & 2y & - & 4z & = & -x \\ 4x & - & 3y & + & 4z & = & -y \\ 2x & - & 3y & + & 5z & = & -z \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 2y & - & 4z & = & 0 \\ 4x & - & 2y & + & 4z & = & 0 \\ 2x & - & 3y & + & 6z & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 2z \\ y & = & 2z \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 2z \end{array}\right.$$

Donc $E_{-1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \,\text{et}\, y = 2z\}$.
Ou encore $E_{-1} = \{(0, 2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z.(0, 2, 1) \mid z \in \mathbb{R}\}$.
Si on pose $u_2 = (0, 2, 1)$, on obtient que $E_{-1} = \{z.u_2 \mid z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(u_2)$. Ce qui signifie que la famille (d'un seul vecteur) $\{u_2\}$ est génératrice de E_{-1}. Puisque $u_2 \neq 0$, la famille $\{u_2\}$ est libre et c'est une base de E_{-1}.

• $\lambda_3 = 3$
L'espace propre associé à $\lambda_3 = 3$ est $E_3 = \{U \in \mathbb{R}^3 \mid A \times U = 3U\}$.
Autrement dit, si on pose $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a $U \in E_3 \Leftrightarrow A \times U = 3.U = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix}$
On doit donc résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -3x & + & 2y & - & 4z & = & 3x \\ 4x & - & 3y & + & 4z & = & 3y \\ 2x & - & 3y & + & 5z & = & 3z \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -6x & + & 2y & - & 4z & = & 0 \\ 4x & - & 6y & + & 4z & = & 0 \\ 2x & - & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2x & - & 4y & & & = & 0 \\ 2x & - & 3y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -2y \\ z & = & \frac{7}{2} y \end{array}\right.$$

Donc $E_3 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -2y \,\text{et}\, z = \frac{7}{2} y\right\}$.

Ou encore $E_{-1} = \left\{ \left(-2y, y, \dfrac{7}{2}y \right) \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \dfrac{1}{2}y.\,(-4,2,7) \mid y \in \mathbb{R} \right\}$.
Si on pose $u_3 = (-4,2,7)$, on obtient que $E_3 = \{y.u_3 \mid y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(u_3)$. Ce qui signifie que la famille $\{u_3\}$ est génératrice de E_3. Puisque $u_3 \neq 0$, la famille $\{u_3\}$ est libre et c'est une base de E_3.

Correction 2

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}_B(X) = \det(B - XI_3) &= \begin{vmatrix} -15-X & -6 & 6 \\ 36 & 15-X & -12 \\ -9 & -3 & 6-X \end{vmatrix} \quad C_2 \leftarrow C_2 + C_3 \\
&= \begin{vmatrix} -15-X & 0 & 6 \\ 36 & 3-X & -12 \\ -9 & 3-X & 6-X \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\
&= \begin{vmatrix} -15-X & 0 & 6 \\ 36 & 3-X & -12 \\ -45 & 0 & 18-X \end{vmatrix} \\
&= (3-X) \begin{vmatrix} -15-X & 6 \\ -45 & 18-X \end{vmatrix} \\
&= (3-X)[(-15-X)(18-X) + 6 \times 45] \qquad \text{(Remarque : } 6 \times 45 = 6 \times 3 \times 15 = 18 \times 15\text{)} \\
&= (3-X)(X^2 - 3X) \\
&= (3-X)X(X-3) \\
&= -X(X-3)^2
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de B sont les racines de $\tilde{\pi}_B$ le polynôme caractéristique de B. Ce sont $\lambda_1 = 0$ (valeur propre simple) et $\lambda_2 = 3$ (valeur propre double).
En particulier, on a $\mathrm{Sp}\,(B) = \{0; 3\}$.

- $\lambda_1 = 0$

$U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0 \Leftrightarrow B \times U = 0.U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

On doit donc résoudre le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -15x & - & 6y & + & 6z & = & 0 \\ 36x & + & 15y & - & 12z & = & 0 \\ -9x & - & 3y & + & 6z & = & 0 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 1/3 \times L_1 \\ L_2 \leftarrow 1/3 \times L_2 \\ L_3 \leftarrow 1/3 \times L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -5x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ 12x & + & 5y & - & 4z & = & 0 \\ -3x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -5x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & y & & & = & 0 \\ 2x & + & y & & & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & \dfrac{1}{2}(5x + 2y) = \dfrac{1}{2}x \\ y & = & -2x \end{array} \right.$$

En prenant par exemple $x = 2$, on trouve que le vecteur $u_1 = (2; -4; 1)$ appartient à E_0. De plus, on a $E_0 = \mathrm{Vect}(u_1)$ et, puisque $u_1 \neq 0$, $\{u_1\}$ est une base de E_0.

- $\lambda = 3$

$U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3 \Leftrightarrow A \times U = 3.U = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix}$

On doit donc résoudre le système :

$$\begin{cases} -15x - 6y + 6z = 3x \\ 36x + 15y - 12z = 3y \\ -9x - 3y + 6z = 3z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -18x - 6y + 6z = 0 & L_1 \leftarrow 1/6 \times L_1 \\ 36x + 12y - 12z = 0 & L_2 \leftarrow 1/12 \times L_2 \\ -9x - 3y + 3z = 0 & L_3 \leftarrow 1/3 \times L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x - y + z = 0 \\ -3x - y + z = 0 \\ -3x - y + z = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow -3x - y + z = 0$

$\Leftrightarrow z = 3x + y$

Donc $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z = 3x + y\}$.

Ou encore $E_3 = \{(x, y, 3x + y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{x.(1, 0, 3) + y.(0, 1, 1) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

Si on pose $u_2 = (1; 0; 3)$ et $u_3 = (0; 1; 1)$, on a $E_3 = \{x.u_2 + y.u_3 \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(u_2, u_3)$. Autrement dit, la famille $\{u_2, u_3\}$ est une génératrice de E_3. De plus, puisque u_2 et u_3 ne sont pas proportionnels, la famille $\{u_2, u_3\}$ est libre. C'est donc une base de E_3.

Correction 3

1. $$\tilde{\pi}_A(X) = \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3}{\begin{vmatrix} -49 - X & 4 & -22 \\ -50 & 5 - X & -22 \\ 100 & -8 & 45 - X \end{vmatrix}} = \underset{C_2 \leftarrow C_2 - C_1;\quad C_3 \leftarrow C_3 - C_1}{\begin{vmatrix} 1 - X & 1 - X & 1 - X \\ -50 & 5 - X & -22 \\ 100 & -8 & 45 - X \end{vmatrix}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 - X & 0 & 0 \\ -50 & 55 - X & 28 \\ 100 & -108 & -55 - X \end{vmatrix}$$

$$= (1 - X) \times \begin{vmatrix} 55 - X & 28 \\ -108 & -55 - X \end{vmatrix} = (1 - X) \times (X^2 - 55^2 + 28 \times 108)$$

$$= (1 - X) \times (X^2 - 1) = (1 - X)(X - 1)(X + 1) = -(X + 1)(X - 1)^2$$

Le polynôme caractéristique possède une valeur propre simple ($= -1$) et une valeur propre double ($= 1$).

La matrice sera diagonalisable si $\dim E_1 = 2$.

- $\lambda = -1$

$U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \Leftrightarrow A \times U = -1.U = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} -49x + 4y - 22z = -x \\ -50x + 5y - 22z = -y \\ 100x - 8y + 45z = -z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -48x & + & 4y & - & 22z & = & 0 \\ -50x & + & 6y & - & 22z & = & 0 \\ 100x & - & 8y & + & 46z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -24x & + & 2y & - & 11z & = & 0 \\ -25x & + & 3y & - & 11z & = & 0 \\ 50x & - & 4y & + & 23z & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -24x & + & 2y & - & 11z & = & 0 \\ -x & + & y & & & = & 0 \\ 2x & & & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} -24x + 2x + 22x = 0 \\ y = x \\ z = -2x \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y = x \\ z = -2x \end{array}\right.$$

En prenant $x = 1$, on trouve que le vecteur $u_1 = (1; 1; -2)$ appartient à E_{-1}.

De plus, on a $E_{-1} = \text{Vect}(u_1)$ et, puisque $u_1 \neq 0$, $\{u_1\}$ est une base de E_{-1}.

- $\lambda = 1$

$$U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow A \times U = 1.U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -49x & + & 4y & - & 22z & = & x \\ -50x & + & 5y & - & 22z & = & y \\ 100x & - & 8y & + & 45z & = & z \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -50x & + & 4y & - & 22z & = & 0 \\ -50x & + & 4y & - & 22z & = & 0 \\ 100x & - & 8y & + & 44z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 25x - 2y + 11z = 0$$

En prenant $x = 2$ et $y = 3$, on trouve $z = -4$ et donc le vecteur $u_2 = (2; 3; -4)$ appartient à E_1.

En prenant $x = -3$ et $y = 1$, on trouve $z = 7$ et donc le vecteur $u_3 = (-3; 1; 7)$ appartient à E_1.

De plus, on a $E_1 = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et, puisque u_1 et u_2 ne sont pas proportionnels, $\{u_1, u_2\}$ est une base de E_1.

La matrice est diagonalisable car (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ formées de vecteurs propres.

2. Pour tout $p \geq 0$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. En particulier, on a $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   Le système est équivalent à $U_{n+1} = A \times U_p$ et donc $U_n = A^p \times U_0$.

   On doit donc calculer A^p.

   On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$

On a $P^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & -2 & 11 \\ -9 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Et $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{diag}(-1; 1; 1) = D.$

Remarquons que $D^n = I_3$ si n est pair et $D^n = D$ si n est impair.

On a donc $A^p = PD^pP^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3$ si n est pair et $A^p = PD^pP^{-1} = PDP^{-1} = A$ si n est impair.

On obtient que $U_n = A^p \times U_0 = U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ si n est pair.

Et $U_n = A^p \times U_0 = A \times U_0 = \begin{pmatrix} -107 \\ -106 \\ 219 \end{pmatrix}$ si n est impair.

Autrement dit, $u_p = 1$ si n est pair et $u_p = -107$ si n est impair.

Puis, $v_p = 2$ si n est pair et $v_p = -106$ si n est impair.

Enfin, $w_p = 3$ si n est pair et $w_p = 219$ si n est impair

Correction 4

1. $\tilde{\pi}_A(X) = \begin{vmatrix} 2-X & 1 & -2 \\ 1 & -X & 0 \\ 0 & 1 & -X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & -2 \\ 1-X & -X & 0 \\ 1-X & 1 & -X \end{vmatrix}$

   $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1;\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

   $= \begin{vmatrix} 1-X & 1 & -2 \\ 0 & -1-X & 2 \\ 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)\begin{vmatrix} -1-X & 2 \\ 0 & 2-X \end{vmatrix}$

   $= (1-X)(-1-X)(2-X).$

   Les racines du polynôme caractéristique sont -1, 1 et 2 c'est-à-dire $\text{Sp}\,(A) = \{-1; 1; 2\}$.

   Les 3 valeurs propres sont simples. La matrice est donc diagonalisable. De plus, tous les sous-espaces propres seront de dimension 1. Il suffira donc à chaque fois de trouver un vecteur non nul de l'espace propre.

   - $\lambda = -1$

   $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \;\Leftrightarrow\; A \times U = -1.U = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$

   On doit donc résoudre le système :

   $$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & 2z & = & -x \\ x & & & & & = & -y \\ & & y & & & = & -z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & z \\ y & = & -z \end{array}\right.$$

   En prenant par exemple $z = 1$, on trouve que le vecteur $u_1 = (1; -1; 1)$ appartient à E_{-1}. De plus, on a $E_{-1} = \text{Vect}(u_1)$ et, puisque $u_1 \neq 0$, $\{u_1\}$ est une base de E_{-1}.

- $\lambda = 1$

$U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \;\Leftrightarrow\; A \times U = 1.U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

On doit donc résoudre le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & 2z & = & x \\ x & & & & & = & y \\ & & y & & & = & z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & z \end{array} \right.$$

En prenant par exemple $z = 1$, on trouve que le vecteur $u_2 = (1;1;1)$ appartient à E_1. De plus, on a $E_1 = \text{Vect}(u_2)$ et, puisque $u_2 \neq 0$, $\{u_2\}$ est une base de E_1.

- $\lambda = 2$

$U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \;\Leftrightarrow\; A \times U = 2.U = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$

On doit donc résoudre le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & 2z & = & 2x \\ x & & & & & = & 2y \\ & & y & & & = & 2z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 4z \\ y & = & 2z \end{array} \right.$$

En prenant par exemple $z = 1$, on trouve que le vecteur $u_3 = (4;2;1)$ appartient à E_2. De plus, on a $E_2 = \text{Vect}(u_3)$ et, puisque $u_3 \neq 0$, $\{u_3\}$ est une base de E_1.

Si on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, on a $D = P^{-1} \times A \times P$.

2. *Méthode 1*

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1 ; L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

donc P est inversible.

$Com(P) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$.

$P^{-1} = \dfrac{1}{\det(P)}\, {}^t(ComP) = \dfrac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

On a donc $A = PDP^{-1}$ et, par récurrence, on montre que $A^n = PD^nP^{-1}$.

$D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

$PD^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 1 & 4.2^n \\ -(-1)^n & 1 & 2.2^n \\ (-1)^n & 1 & 2^n \end{pmatrix}$

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3+8\,2^n+(-1)^n & 3-3\,(-1)^n & 6-8\,2^n+2\,(-1)^n \\ -3+4\,2^n-(-1)^n & 3+3\,(-1)^n & 6-4\,2^n-2\,(-1)^n \\ -3+2\,2^n+(-1)^n & 3-3\,(-1)^n & 6-2\,2^n+2\,(-1)^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}+\frac{4}{3}\,2^n+\frac{1}{6}\,(-1)^n & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,(-1)^n & 1-\frac{4}{3}\,2^n+\frac{1}{3}\,(-1)^n \\ -\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\,2^n-\frac{1}{6}\,(-1)^n & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,(-1)^n & 1-\frac{2}{3}\,2^n-\frac{1}{3}\,(-1)^n \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\,2^n+\frac{1}{6}\,(-1)^n & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,(-1)^n & 1-\frac{1}{3}\,2^n+\frac{1}{3}\,(-1)^n \end{pmatrix}$$

Méthode 2

On effectue la division euclidienne de X^n par $\tilde{\pi}_A(X)$ qui est de degré 3. Il existe un polynôme $Q(X)$ et un polynôme $R(X)$ de degré 2 tels que $X^n = \tilde{\pi}_A(X)Q(X) + R(X) = (1-X)(-1-X)(2-X)Q(X) + aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Pour $X = -1$, on obtient $a - b + c = (-1)^n$.

Pour $X = 1$, on obtient $a + b + c = 1^n = 1$.

Pour $X = 2$, on obtient $4a + 2b + c = 2^n$.

On obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a & - & b & + & c & = & (-1)^n \\ a & + & b & + & c & = & 1 \\ 4a & + & 2b & + & c & = & 2^n \end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 ; L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} a & - & b & + & c & = & (-1)^n \\ & & 2b & & & = & 1-(-1)^n \\ 3a & + & b & & & = & 2^n-(-1)^n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} c & = & \dfrac{-2.2^n+3.(-1)^n+1}{6} \\ b & = & \dfrac{1-(-1)^n}{2} \\ a & = & \dfrac{2.2^n-(-1)^n-1}{6} \end{array}\right.$$

De plus, comme tout matrice est racine de son polynôme caractéristique, on a $\tilde{\pi}_A(A) = 0$ et donc $A^n = aA^2 + bA + c.I_3 = \dfrac{2.2^n-(-1)^n-1}{6}A^2 + \dfrac{1-(-1)^n}{2}A + \dfrac{-2.2^n+3.(-1)^n+1}{6}I_3$.

Le calcul ainsi que la comparaison des résultats sont laissés au soin du lecteur.

3. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

Puisque $u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$, on a donc :

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A \times U_n$$

C'est une simple récurrence.

On a $U_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$A^n \times U_0 = \begin{pmatrix} 3-4\times 2^n-(-1)^n \\ 3-2\times 2^n+(-1)^n \\ 3-2^n-(-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Donc $u_n = 3 - 2^n - (-1)^n$.

Correction 5

1. $\tilde{\pi}_A(X) = \begin{vmatrix} 2-X & 0 & 0 \\ -1 & 2-X & 1 \\ -1 & 0 & 3-X \end{vmatrix} = (2-X)\begin{vmatrix} 2-X & 1 \\ 0 & 3-X \end{vmatrix} = (2-X)^2(3-X)$

   Les racines du polynôme caractéristique sont 2 et 3 c'est-à-dire $\mathrm{Sp}\,(A) = \{2; 3\}$.

   - $\lambda = 2$

   $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow A \times U = 2.U = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$

   $\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & & & & & = & 2x \\ -x & + & 2y & + & z & = & 2y \\ -x & & & + & 3z & = & 2z \end{array}\right.$

   $\Leftrightarrow\ z = x$

   En prenant $z = 1$ et $y = 0$, on trouve que le vecteur $u_1 = (1; 0; 1)$ appartient à E_2.

   En prenant $z = 0$ et $y = 1$, on trouve que le vecteur $u_2 = (0; 1; 0)$ appartient à E_2.

   De plus, on a $E_2 = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ et, puisque u_1 et u_2 ne sont pas proportionnels, $\{u_1, u_2\}$ est une base de E_2.

   - $\lambda = 3$

   $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow A \times U = 2.U = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$

   $\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & & & & & = & 3x \\ -x & + & 2y & + & z & = & 3y \\ -x & & & + & 3z & = & 3z \end{array}\right.$

   $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & 0 \\ y & = & z \end{array}\right.$

   En prenant $z = 1$, on trouve que le vecteur $u_3 = (0; 1; 1)$ appartient à E_3.

   De plus, on a $E_3 = \mathrm{Vect}(u_3)$ et, puisque $u_3 \neq 0$, $\{u_3\}$ est une base de E_3.

   On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Puisque 0 n'est pas valeur propre de A, elle est donc inversible.

   On a $\tilde{\pi}_A(X) = -X^3 + 7X^2 - 16X + 12$ et, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\tilde{\pi}_A[A] = 0$ donc $-A^3 + 7A^2 - 16A + 12I_3 = 0$.

   On obtient $A \times \dfrac{A^2 - 7A + 16I_3}{12} = I_3$. Ce qui signifie que $A^{-1} = \dfrac{A^2 - 7A + 16I_3}{12}$.

3. On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et on a $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$

Le système peut donc s'écrire $X' = AX$.

Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$ telle que $X = PY$.

On a $Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}$ et $X' = PY'$.

Mais $X' = AX \Rightarrow PY' = APY \Rightarrow Y' = P^{-1}APY = DY$.

On est donc ramener à résoudre le système : $\begin{cases} y_1' &= 2y_1(t) \\ y_2' &= 2y_2(t) \\ y_3' &= 3y_3(t) \end{cases}$

D'où $Y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^{2t} \\ c_2e^{2t} \\ c_3e^{3t} \end{pmatrix}$ avec $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

On trouve X par la relation $X = PY$.

C'est-à-dire $\begin{cases} x_1(t) = c_1e^{2t} \\ x_2(t) = c_2e^{2t} + c_3e^{3t} \\ x_3(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{2t} + 3c_3e^{3t} \end{cases}$.

4. Rappel : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Et on obtient $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   De plus, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(2;2;3) = D$.

   On a donc $A = PDP^{-1}$ et, par récurrence, on montre que $A^n = PD^nP^{-1}$.

   On a $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$ et on obtient $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 2^n - 3^n & 2^n & 3^n - 2^n \\ 2^n - 3^n & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

Correction 6

Soit la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

1. $\tilde{\pi}_A(X) = (1 - X)(2 - X)(-3 - X)$.

   $\operatorname{Sp}(A) = \{-3; 1; 2\}$.

2. La matrice est inversible car 0 n'est pas valeur propre.

   $\tilde{\pi}_A(X) = -X^3 + 7X - 6$

   $\tilde{\pi}_A(A) = 0 \Leftrightarrow -A^3 + 7A - 6I = 0 \Leftrightarrow A \times \dfrac{1}{6}(7I - A^2) = I$ donc $A^{-1} = \dfrac{1}{6}(7I - A^2)$.

3. • Pour $\lambda = -3$, on obtient $y = 7x$ et $z = 11x$. On prend $u_1 = (1; 7; 11)$.
   • Pour $\lambda = 1$, on obtient $x = y = z$. On prend $u_2 = (1; 1; 1)$.
   • Pour $\lambda = 2$, on obtient $x = z$ et $y = 2z$. On prend $u_3 = (1; 2; 1)$.

   On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \\ 11 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   On a $D = P^{-1} \times A \times P$.

4. On pose $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$. On a $X = P \times \begin{pmatrix} c_1e^{-3t} \\ c_2e^t \\ c_3e^{2t} \end{pmatrix}$ avec c_1, c_2 et $c_3 \in \mathbb{R}$.

   C'est-à-dire $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1(t) & = & c_1e^{-3t} & + & c_2e^t & + & c_3e^{2t} \\ x_2(t) & = & 7c_1e^{-3t} & + & c_2e^t & + & 2c_3e^{2t} \\ x_3(t) & = & 11c_1e^{-3t} & + & c_2e^t & + & c_3e^{2t} \end{array} \right.$.

5. $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$ avec $D^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \dfrac{1}{10} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 15 & -10 & 5 \\ -4 & 10 & -6 \end{pmatrix}$.

   On obtient $P \times D^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 1 & 2^n \\ 7{\times}(-3)^n & 1 & 2{\times}2^n \\ 11{\times}(-3)^n & 1 & 2^n \end{pmatrix}$.

   Et $P{\times}D^n{\times}P^{-1} = \dfrac{1}{10} \begin{pmatrix} -(-3)^n + 15 - 4{\times}2^n & -10 + 10{\times}2^n & (-3)^n + 5 - 6{\times}2^n \\ -7{\times}(-3)^n + 15 - 8{\times}2^n & -10 + 20{\times}2^n & 7{\times}(-3)^n + 5 - 12{\times}2^n \\ -11{\times}(-3)^n + 15 - 4{\times}2^n & -10 + 10{\times}2^n & 11{\times}(-3)^n + 5 - 6{\times}2^n \end{pmatrix}$.

   Pour $n = 10$, on a $A^{10} = P{\times}D^{10}{\times}P^{-1}$

   $$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -(-3)^{10} + 15 - 4{\times}2^{10} & -10 + 10{\times}2^{10} & (-3)^{10} + 5 - 6{\times}2^{10} \\ -7{\times}(-3)^{10} + 15 - 8{\times}2^{10} & -10 + 20{\times}2^{10} & 7{\times}(-3)^{10} + 5 - 12{\times}2^{10} \\ -11{\times}(-3)^{10} + 15 - 4{\times}2^{10} & -10 + 10{\times}2^{10} & 11{\times}(-3)^{10} + 5 - 6{\times}2^{10} \end{pmatrix}.$$

6. On a $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   C'est-à-dire $\left\{ \begin{array}{rcl} u_n & = & \dfrac{1}{10}(-2(-3)^n + 10 + 2{\times}2^n) \\ v_n & = & \dfrac{1}{10}(-14{\times}(-3)^n + 10 + 4{\times}2^n) \\ w_n & = & \dfrac{1}{10}(-22{\times}(-3)^n + 10 + 2{\times}2^n) \end{array} \right.$.

Correction 7

Soit la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

1. $\tilde{\pi}_A(X) = -X(X+4)(X-6)$.

   $\mathrm{Sp}\,(A) = \{-4; 0; 6\}$.

2. La matrice n'est pas inversible car 0 est valeur propre.

3. • Pour $\lambda = -4$, on obtient $7x = -13y$ et $z = -3x - 6y$. On pose $u_1 = (13; -7; 3)$.
   • Pour $\lambda = 0$, on obtient $x = y$ et $z = -5y$. On pose $u_2 = (1; 1; -5)$.
   • Pour $\lambda = 6$, on obtient $x = y = z$. On pose $u_3 = (1; 1; 1)$

   On pose $P = \begin{pmatrix} 13 & 1 & 1 \\ -7 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

   On a $D = P^{-1} \times A \times P$.

4. On pose $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$. On a $X = P \times \begin{pmatrix} c_1 e^{-4t} \\ c_2 \\ c_3 e^{6t} \end{pmatrix}$ avec c_1, c_2 et $c_3 \in \mathbb{R}$.

   C'est-à-dire $\left\{ \begin{array}{lclclcl} x_1(t) & = & 13c_1e^{-4t} & + & c_2 & + & c_3e^{6t} \\ x_2(t) & = & -7c_1e^{-4t} & + & c_2 & + & c_3e^{6t} \\ x_3(t) & = & 31c_1e^{-4t} & - & 5c_2 & + & c_3e^{6t} \end{array} \right.$.

5. $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$ avec $D^n = \begin{pmatrix} (-4)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \dfrac{1}{60} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 5 & 5 & -10 \\ 16 & 34 & 10 \end{pmatrix}$.

   On obtient $P \times D^n = \begin{pmatrix} 13\times(-4)^n & 0 & 6^n \\ -7\times(-4)^n & 0 & 6^n \\ 3\times(-4)^n & 0 & 6^n \end{pmatrix}$.

   Et $P \times D^n \times P^{-1} = \dfrac{1}{60} \begin{pmatrix} 39\times(-4)^n + 16\times6^n & -39\times(-4)^n + 34\times6^n & 10\times6^n \\ -21\times(-4)^n + 16\times6^n & 21\times(-4)^n + 34\times6^n & 10\times6^n \\ 9\times(-4)^n + 16\times6^n & -9\times(-4)^n + 34\times6^n & 10\times6^n \end{pmatrix}$.

   De plus, $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   C'est-à-dire $\left\{ \begin{array}{lcl} u_n & = & \dfrac{1}{60}(-39\times(-4)^n - 6\times6^n) \\ v_n & = & \dfrac{1}{60}(21\times(-4)^n - 6\times6^n) \\ w_n & = & \dfrac{1}{60}(-9\times(-4)^n - 6\times6^n) \end{array} \right.$.

Correction 8

Soit la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -16 & -8 & 11 \\ -20 & -10 & 13 \end{pmatrix}$.

1. $\tilde{\pi}_A(X) = \begin{vmatrix} -4-X & -2 & 2 \\ -16 & -8-X & 11 \\ -20 & -10 & 13-X \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 - L_2$

   $= \begin{vmatrix} -4-X & -2 & 2 \\ -16 & -8-X & 11 \\ X & X & -X \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_3;\ C_2 \leftarrow C_2 + C_3$

$$= \begin{vmatrix} -2-X & 0 & 2 \\ -5 & 3-X & 11 \\ 0 & 0 & -X \end{vmatrix} = -X \times \begin{vmatrix} -2-X & 0 \\ -5 & 3-X \end{vmatrix} = -X(-2-X)(3-X).$$

$\mathrm{Sp}\,(A) = \{-2; 0; 3\}$.

2. La matrice n'est pas inversible car 0 est valeur propre.

3. • Pour $\lambda = -2$, on obtient $y = x$ et $z = 2x$. On pose $u_1 = (1; 1; 2)$.
   • Pour $\lambda = 0$, on obtient $y = -2x$ et $z = 0$. On pose $u_2 = (1; -2; 0)$.
   • Pour $\lambda = 3$, on obtient $x = 0$ et $z = y$. On pose $u_3 = (0; 1; 1)$

   On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

   On a $D = P^{-1} \times A \times P$.

4. On pose $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$. On a $X = P \times \begin{pmatrix} c_1 e^{-2t} \\ c_2 \\ c_3 e^{3t} \end{pmatrix}$ avec c_1, c_2 et $c_3 \in \mathbb{R}$.

   C'est-à-dire $\left\{ \begin{array}{lllllll} x_1(t) & = & c_1 e^{-2t} & + & c_2 & & \\ x_2(t) & = & c_1 e^{-2t} & - & 2c_2 & + & c_3 e^{3t} \\ x_3(t) & = & 2c_1 e^{-2t} & & & + & c_3 e^{3t} \end{array} \right.$.

5. $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$ avec $D^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

   On obtient $P \times D^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ (-2)^n & 0 & 3^n \\ 2\times(-2)^n & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

   Et $P \times D^n \times P^{-1} = \begin{pmatrix} 2\times(-2)^n & (-2)^n & -(-2)^n \\ 2\times(-2)^n - 4\times 3^n & (-2)^n - 2\times 3^n & -(-2)^n + 3\times 3^n \\ 8\times(-2)^n - 4\times 3^n & 2\times(-2)^n - 2\times 3^n & -2\times(-2)^n + 3\times 3^n \end{pmatrix}$.

   De plus, $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   C'est-à-dire $\left\{ \begin{array}{lllll} u_n & = & 2\times(-2)^n & & \\ v_n & = & 2\times(-2)^n & - & 3\times 3^n \\ w_n & = & 8\times(-2)^n & - & 3\times 3^n \end{array} \right.$.