Université de Picardie Jules Verne

UFR d'économie et de gestion

Mathématiques

Licence 2 - Semestre 3

Exercices d'entrainement **Diagonalisation** **Enoncés**

Exercice 1

Déterminer le spectre et les espaces propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 4 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 2

Déterminer le spectre et les espaces propres de la matrice $B = \begin{pmatrix} -15 & -6 & 6 \\ 36 & 15 & -12 \\ -9 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 3

Soit la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} -49 & 4 & -22 \\ -50 & 5 & -22 \\ 100 & -8 & 45 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Soient $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ trois suites de $\mathbb{R}$ vérifiant $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et $w_0 = 3$.

   On suppose de plus que $\begin{cases} u_{n+1} & = & -49u_n + 4v_n - 22w_n \\ v_{n+1} & = & -50u_n + 5v_n - 22w_n \\ w_{n+1} & = & 100u_n - 8v_n + 45w_n \end{cases}$.

   Donner pour chacune des suites leur expression en fonction de n.

Exercice 4

Soit la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Déterminer, de deux manières différentes, A^n pour tout entier n.
3. Soit la suite u définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = -2$ et la relation de récurrence $u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$.

   Donner une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 5

Soit la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Donner les valeurs propres de A.
2. La matrice A est-elle inversible?

   Si oui, en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, donner **une expression** de A^{-1} en fonction de A et de A^2 (la valeur de A^{-1} sous forme d'une matrice 3×3 n'est pas demandée).
3. Résoudre le système différentiel suivant : $\left\{ \begin{array}{lllllll} x_1' & = & 2x_1 & & & & \\ x_2' & = & -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 \\ x_3' & = & -x_1 & & & + & 3x_3 \end{array} \right.$
4. Déterminer A^n pour tout entier n.

Exercice 6

Soit la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Donner les valeurs propres de A (on pourra utiliser $C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3$ dans $\det(A-XI_3)$).
2. La matrice A est-elle inversible?

   Si oui, en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, donner **une expression** de A^{-1} en fonction de A et de A^2 (la valeur de A^{-1} sous forme d'une matrice 3×3 n'est pas demandée).
3. Donner une base pour chacun des espaces propres.
4. Résoudre le système différentiel suivant : $\left\{ \begin{array}{lllllll} x_1' & = & x_1 & + & x_2 & - & x_3 \\ x_2' & = & 2x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 \\ x_3' & = & 4x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 \end{array} \right.$.
5. Déterminer A^{10}.
6. Soient $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ trois suites de $\mathbb{R}$ vérifiant $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $w_0 = -1$.

   On suppose de plus que $\left\{ \begin{array}{lllllll} u_{n+1} & = & u_n & + & v_n & - & w_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n & + & 3v_n & - & 4w_n \\ w_{n+1} & = & 4u_n & + & v_n & - & 4w_n \end{array} \right.$.

   Donner pour chacune des suites leur expression en fonction de n.

Exercice 7

Soit la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner les valeurs propres de A (on pourra utiliser $C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3$ dans $\det(A-XI_3)$).

2. La matrice A est-elle inversible?

   Si oui, en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, donner **une expression** de A^{-1} en fonction de A et de A^2 (la valeur de A^{-1} sous forme d'une matrice 3×3 n'est pas demandée).

3. Donner une base pour chacun des espaces propres.

4. Résoudre le système différentiel suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1' & = & -x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 \\ x_2' & = & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 \\ x_3' & = & x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 \end{array}\right.$.

5. Déterminer A^{10}.

6. Soient $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ trois suites de $\mathbb{R}$ vérifiant $u_0 = -1$, $v_0 = 0$ et $w_0 = 1$.

   On suppose de plus que $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} u_{n+1} & = & -u_n & + & 6v_n & + & w_n \\ v_{n+1} & = & 3u_n & + & 2v_n & + & w_n \\ w_{n+1} & = & u_n & + & 4v_n & + & w_n \end{array}\right.$.

   Donner pour chacune des suites leur expression en fonction de n.

Exercice 8

Soit la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -16 & -8 & 11 \\ -20 & -10 & 13 \end{pmatrix}$.

1. Donner les valeurs propres de A (on pourra utiliser $L_3 \leftarrow L_3 - L_1 - L_2$ dans $\det(A - XI_3)$).

2. La matrice A est-elle inversible?

   Si oui, en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, donner **une expression** de A^{-1} en fonction de A et de A^2 (la valeur de A^{-1} sous forme d'une matrice 3×3 n'est pas demandée).

3. Donner une base pour chacun des espaces propres.

4. Résoudre le système différentiel suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1' & = & -4x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 \\ x_2' & = & -16x_1 & - & 8x_2 & + & 11x_3 \\ x_3' & = & -20x_1 & - & 10x_2 & + & 13x_3 \end{array}\right.$.

5. Déterminer A^{10}.

6. Soient $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ trois suites de $\mathbb{R}$ vérifiant $u_0 = 1$, $v_0 = 1$ et $w_0 = 1$.

   On suppose de plus que $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} u_{n+1} & = & -4u_n & - & 2v_n & + & 2w_n \\ v_{n+1} & = & -16u_n & - & 8v_n & + & 11w_n \\ w_{n+1} & = & -20u_n & - & 10v_n & + & 13w_n \end{array}\right.$.

   Donner pour chacune des suites leur expression en fonction de n.