Université de Picardie Jules Verne
UFR d'économie et de gestion

Mathématiques

Licence 2 - Semestre 3

Exercices d'entrainement **Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$** **Corrigés**

Correction 1

$a+b=(-4;2;4;1;7)$
$a-b=(-6;2;-2;-3;-1)$
$2a+b-c=(-9;2;4;1;7)$
$2(a-b)+3(b+c)-5c=2a+b-2c=(-9;0;3;2;4)$

Correction 2

1. On a $a+b+c=(0;0;0;0)$. Cela signifie que $b+c$ est l'opposé de a.

   Autrement dit, $b+c=-a$.

2. Puisque $a=-b-c$ est une combinaison linéaire (C.L.) de b et c, la famille $\{a,b,c\}$ est liée.

3. $2(a-3b)+5(b+2c)=2a-b+10c=(-35;-8;30;-49)$.

4. $a-4\left(b-\dfrac{1}{2}c\right)=a-4b+2c=(7;3;1;0)$.

5. $\alpha a+\beta b-c=(3\alpha+\beta+4;\alpha+1;\ldots;\ldots)$.

   On doit donc avoir $\left\{\begin{array}{lcl} 3\alpha+\beta+4 & = & 0 \\ \alpha+1 & = & 0 \end{array}\right.$ soit $\alpha=\beta=-1$.

Correction 3

1. *Méthode 1 :*

   $$\begin{aligned} 3u-2a+b=4(u-c) &\Leftrightarrow 3u-2a+b=4u-4c \\ &\Leftrightarrow u=-2a+b+4c \end{aligned}$$

   En remplaçant chaque vecteur par ses coordonnées, l'équation devient :

   $$\begin{aligned} (x;y;z) &= -2(1;2;3)+(1;1;-1)+4(2;1;1) \\ &= (-2;-4;-6)+(1;1;-1)+(8;4;4)=(7;1;-3). \end{aligned}$$

   Méthode 2 :

   En remplaçant directement chaque vecteur par ses coordonnées, l'équation devient $3(x;y;z)-2(1;2;3)+(1;1;-1)=4((x;y;z)-(2;1;1))$

Soit $(3x; 3y; 3z) - (2; 4; 6) + (1; 1; -1) = 4(x - 2; y - 1; z - 1)$

Ou encore $(3x - 1; 3y - 3; 3z - 7) = (4x - 8; 4y - 4; 4z - 4)$

On a donc $\left\{\begin{array}{lcl} 3x-1 & = & 4x-8 \\ 3y-3 & = & 4y-4 \\ 3z-7 & = & 4z-4 \end{array}\right.$ soit $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 7 \\ y & = & 1 \\ z & = & -3 \end{array}\right.$.

2. $$\left\{\begin{array}{rcl} 2u-3v & = & 2a-b \\ -u+2v & = & a+c \end{array}\right. \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -u+2v & = & a+c \\ 2u-3v & = & 2a-b \end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -u+2v & = & a+c \\ v & = & 4a-b+2c \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} u & = & 2v-a-c \\ v & = & 4a-b+2c \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcccccc} u & = & 7a-2b+3c & = & 7(1;2;3)-2(1;1;-1)+3(2;1;1) & = & (11;15;26) \\ v & = & 4a-b+2c & = & 4(1;2;3)-(1;1;-1)+2(2;1;1) & = & (7;9;15) \end{array}\right.$$

3. $$k.a + \ell.b + m.c = 0$$

$$\Leftrightarrow k.(1;2;3) + \ell.(1;1;-1) + m.(2;1;1) = (0;0;0)$$

$$\Leftrightarrow (k+\ell+2m; 2k+\ell+m; 3k-\ell+m) = (0;0;0)$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} k+\ell+2m & = & 0 \\ 2k+\ell+m & = & 0 \\ 3k-\ell+m & = & 0 \end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1; L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} k+\ell+2m & = & 0 \\ -\ell-3m & = & 0 \\ -4\ell-5m & = & 0 \end{array}\right. \quad L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} k+\ell+2m & = & 0 \\ -\ell-3m & = & 0 \\ 7m & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} k & = & 0 \\ \ell & = & 0 \\ m & = & 0 \end{array}\right.$$

4. $l_1.a + l_2.b + l_3.c = (1;7;16)$

$$\Leftrightarrow l_1.(1;2;3) + l_2.(1;1;-1) + l_3.(2;1;1) = (1;7;16)$$

$$\Leftrightarrow (l_1+l_2+2l_3; 2l_1+l_2+l_3; 3l_1-l_2+l_3) = (1;7;16)$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} l_1+l_2+2l_3 & = & 1 \\ 2l_1+l_2+l_3 & = & 7 \\ 3l_1-l_2+l_3 & = & 16 \end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1; L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} l_1+l_2+2l_3 & = & 1 \\ -l_2-3l_3 & = & 5 \\ -4l_2-5l_3 & = & 13 \end{array}\right. \quad L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} l_1 + l_2 + 2l_3 & = & 1 \\ -l_2 - 3l_3 & = & 5 \\ 7l_3 & = & -7 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} l_1 & = & 5 \\ l_2 & = & -2 \\ l_3 & = & -1 \end{array} \right.$$

Autrement dit, $w = 5a - 2b - c$.

Correction 4

On a $c = 3b - a$, $d = a + 3b$ et $e = b - a$. Donc toute combinaision linéaire de a, b, c, d et e est simplement une combinaision linéaire de a et de b. C'est-à-dire $\text{Vect}(a, b, c, d, e) = \text{Vect}(a, b)$. Puis que les vecteurs a ne sont pas proportionnels, la famille $\{a, b\}$ est libre. Ce qui signifie que $\text{rg}(a, b) = \dim(\text{Vect}(a, b)) = 2$.

Correction 5

1. *Méthode 1 :*

   - $(0; 0; 0) \in F$ car $0 = 0 = 0$ donc $f \neq \varnothing$.
   - Soient $u = (x, y, z) \in F$ et $v = (x', y', z') \in F$.

   On a donc $x = y = z$ et $x' = y' = z'$.

   De plus, $u + v = (x + x', y + y', y + z')$ avec trivialement $x + x' = y + y' = z + z'$ d'où $u + v \in F$.

   - Soit $u = (x, y, z) \in F$ et soit $k \in \mathbb{R}$.

   On a $x = y = z$ et $k.u = (kx, ky, kz)$ avec trivialement $kx = ky = kz$ d'où $k.u \in F$.

   Méthode 2 :

   - $(0; 0; 0) \in F$ car $0 = 0 = 0$ donc $f \neq \varnothing$.
   - Soient $u = (x, y, z)$, $v = (x', y', z') \in F$ et soient $k, \ell \in R$.

   On a donc $x = y = z$ et $x' = y' = z'$.

   De plus, $k.u + \ell.v = (kx, ky, kz) + (\ell x', \ell y', \ell z') = (kx + \ell x', ky + \ell y', kz + \ell z')$ avec trivialement $kx + \ell x' = ky + \ell y' = kz + \ell z$ d'où $k.u + \ell.v \in F$.

   Méthode 3 :

   $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\} = \{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 1, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

   On pose $u_3 = (1, 1, 1)$ et on obtient $F = \{x.u_3 \mid x \in \mathbb{R}\}$. Cela signifie que F est l'ensemble des combinaisons linéaire de u_3. D'après une propriété du cours, F est le sous espace vectoriel engendré par u_3 noté $\text{Vect}(u_3)$. De plus, comme $u_3 \neq 0$, on a donc que la famille $\{u_3\}$ est libre. Enfin, $\{u_3\}$ est une base de F et $\dim F = 1$

2. Voir la Méthode 3 de la question précédente.

3. Pour montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que la famille composée d'une base de F et d'une base de G est une base de $\mathbb{R}^3$.

   Puisque u_1 et u_2 ne sont pas proportionnels, on obtient que la famille $\{u_1; u_2\}$ est libre : c'est donc une base de G.

   La famille $\{u_1; u_2; u_3\}$ est une famille de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3. Pour que c'en soit une base, il suffit qu'elle soit libre. Une méthode simple consiste à calculer $\det(u_1; u_2; u_3)$ et vérifier qu'il est non nul.

   $$\det(u_1; u_2; u_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1;\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$
   $$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

4. On cherche les réels a, b et c tels que $v = au_1 + bu_2 + cu_3$.

   C'est-à-dire $(0; 4; -1) = a(1; 2; 1) + b(1; 0; 2) + c(1, 1, 1)$.

   Ou encore $(0; 4; -1) = (a; 2a; a) + (b; 0; 2b) + (c, c, c)$.

   Soit $(0; 4; -1) = (a + b + c; 2a + c; a + 2b + c)$.

   On doit donc avoir :
   $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} a & + & b & + & c & = & 0 & \\ 2a & & & + & c & = & 4 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ a & + & 2b & + & c & = & -1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$$
   $$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & c & = & 0 \\ & & -2b & - & c & = & 4 \\ & & b & & & = & -1 \end{array}\right.$$
   $$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 3 \\ c = -2 \\ b = -1 \end{array}\right. \quad \text{c'est-à-dire } v = 3u_1 - u_2 - 2u_3.$$

Correction 6

1. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 2z\} = \{(2z, 2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z.(2, 2, 1) \mid z \in \mathbb{R}\}$

   On pose $u_1 = (2; 2; 1)$.

   On a donc $F = \{z.u_1 \mid z \in \mathbb{R}\} = \{\text{C.L. de}\, u_1\} = \text{Vect}(u_1)$.

   Autrement dit, (u_1) est une famille (d'un seul vecteur) génératrice de F et F est le s.e.v engendré par u_1.

   Puisque $u_1 \neq 0$, la famille (u_1) est libre.

   D'où (u_1) est une base de F.

   $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -x - y\}$.
   $= \{(x, y, -x - y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{x.(1; 0; -1) + y.(0; 1; -1) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

   On pose $u_2 = (1; 0; -1)$ et $u_3 = (0; 1; -1)$.

   On a donc $G = \{x.u_2 + y.u_3 \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{\text{C.L. de}\, u_2\, \text{et}\, u_3\} = \text{Vect}(u_2, u_3)$.

Autrement dit, (u_2, u_3) est une famille génératrice de G et G est le s.e.v engendré par u_2 et u_3.

Puisque u_2 et u_3 ne sont pas proportionnels, la famille (u_2, u_3) est libre.

D'où (u_2, u_3) est une base de G.

2. Pour que F et G soit supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ il faut et il suffit que la concaténation d'une base de F et d'une base de G soit une base de $\mathbb{R}^3$.

   La famille $\{u_1; u_2; u_3\}$ est une famille de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3. Pour que c'en soit une base, il suffit qu'elle soit libre. Une méthode simple consiste à calculer $\det(u_1; u_2; u_3)$ et vérifier qu'il est non nul.

   $$\det(u_1; u_2; u_3) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$
   $$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-2-3) = 5 \neq 0$$

   On a donc bien $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Correction 7

1. $\mathcal{M}_{(e)}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

   Et $\det \mathcal{M}_{(e)}(b) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -12 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ donc (b) est bien une base.

2. $[u]_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3. $P_{b\to e} = \left(\mathcal{M}_{(e)}(b)\right)^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -4 & 12 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

   $[v]_e = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $[v]_b = P_{b\to e} \times [v]_e = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$.

Correction 8

1. Soient $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$.
   - $u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

     $f(u_1 + u_2)$

     $= ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2), 4(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - 2(z_1 + z_2), 5(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2))$

$= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2 - z_1 - z_2, 4x_1 + 4x_2 + y_1 + y_2 - 2z_1 - 2z_2, 5x_1 + 5x_2 - y_1 - y_2 - z_1 - z_2)$
$= (x_1 + y_1 - z_1 + x_2 + y_2 - z_2, 4x_1 + y_1 - 2z_1 + 4x_2 + y_2 - 2z_2, 5x_1 - y_1 - z_1 + 5x_2 - y_2 - z_2)$
$= (x_1 + y_1 - z_1, 4x_1 + y_1 - 2z_1, 5x_1 - y_1 - z_1) + (x_2 + y_2 - z_2, 4x_2 + y_2 - 2z_2, 5x_2 - y_2 - z_2)$
$= f(u_1) + f(u_2)$

- $\ell.u_1 = (\ell x_1, \ell y_1, \ell z_1)$

$$\begin{aligned} f(\ell.u_1) &= (\ell x_1 + \ell y_1 - \ell z_1, 4\ell x_1 + \ell y_1 - 2\ell z_1, 5\ell x_1 - \ell y_1 - \ell z_1) \\ &= (\ell(x_1 + y_1 - z_1), \ell(4x_1 + y_1 - 2z_1), \ell(5x_1 - y_1 - z_1)) \\ &= \ell(x_1 + y_1 - z_1, 4x_1 + y_1 - 2z_1, 5x_1 - y_1 - z_1) \\ &= \ell.f(u_1) \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} v = (x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f) &\Leftrightarrow f(v) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + y - z, 4x + y - 2z, 5x - y - z) = (0,0,0) \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ 4x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ 5x & - & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ 3x & & & - & z & = & 0 \\ 6x & & & - & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 2x \\ z & = & 3x \end{array} \right. \end{aligned}$$

   Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 2x \text{ et } z = 3x\}$.
   $= \{x.(1;2;3) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

   On pose $u_1 = (1,2,3)$.

   On a $\mathrm{Ker}(f) = \{x.u_1 \mid x \in \mathbb{R}\}$. Autrement dit, $\mathrm{Ker}(f)$ le s.e.v. engendré par $\{u_1\}$.

   De plus, puisque $u_1 \neq 0$, la famille $\{u_1\}$ est libre. C'est donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

3. $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1); f(e_2); f(e_3))$.

   On a $f(e_1) = (1;4;5)$, $f(e_2) = (1;1;-1)$ et $f(e_3) = (-1;-2;-1)$.

   Puisque $f(e_1) = -2f(e_2) - 3f(e_3)$, on a $\mathrm{Vect}(f(e_1); f(e_2); f(e_3)) = \mathrm{Vect}(f(e_2); f(e_3))$.

   Puisque les vecteurs $f(e_2)$ et $f(e_3)$ ne sont pas proportionnels, la famille $\{f(e_2); f(e_3)\}$ est libre. C'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

4. Pour montrer que les s.e.v. $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires, il suffit de montrer que la famille $\{u_1, f(e_2), f(e_3)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   A nouveau, puisque cette famille est composée de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3, il suffit de vérifier une seule des propriétés : génératrice ou libre.

   Pour savoir si la famille $\{u_1, f(e_2), f(e_3)\}$ est libre, on calcule son déterminant qui doit être non nul.

   $$\det(u_1, f(e_2), f(e_3)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 5 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 22 \neq 0.$$

Correction 9

1. Après calculs (à faire : pour cela voir la méthode dans le corrigé de l'exercice 8), on obtient $\text{Ker}(f) = \{0\}$ et $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

2. f est bijective.

3. (a) b_1 et b_2 sont deux vecteurs non proportionnels donc (b_1, b_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

   (b) $f(b_1) = (3; 2)$ et $f(b_2) = (-1; -9)$.

   $M_{(b),(e)}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$.

   (c) $\det M_{(b),(e)}(f) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -9 \end{vmatrix} = -25 \neq 0$ donc inversible.

   $\left(M_{(b),(e)}(f)\right)^{-1} = \dfrac{1}{25}\begin{pmatrix} -9 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Correction 10

1. Après calculs (à faire : pour cela voir la méthode dans le corrigé de l'exercice 8), on obtient $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(u_1)$ où $u_1 = (1, -2)$ et $\text{Im}(f) = \text{Vect}(u_2)$ où $u_2 = (1, 2)$.

2. f n'est pas bijective.

3. (a) b_1 et b_2 sont deux vecteurs non proportionnels donc (b_1, b_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

   (b) $f(b_1) = (3; 6)$ et $f(b_2) = (13; 26)$.

   $M_{(b),(e)}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 13 \\ 6 & 26 \end{pmatrix}$.

   (c) $\det M_{(b),(e)}(f) = \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 6 & 26 \end{vmatrix} = 0$ donc $M_{(b),(e)}(f)$ n'est pas inversible.

Correction 11

1. Après calculs (à faire : pour cela voir la méthode dans le corrigé de l'exercice 8), on obtient $\text{Ker}(f) = \{0\}$ et $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

2. f est bijective.

3. (a) b_1 et b_2 sont deux vecteurs non proportionnels donc (b_1, b_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

   (b) $f(b_1) = (-1; 2)$ et $f(b_2) = (7; 1)$.

   $M_{(b),(e)}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   (c) $\det M_{(b),(e)}(f) = \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$ donc inversible.

   $\left(M_{(b),(e)}(f)\right)^{-1} = -\dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction 12

1. Après calculs (à faire : pour cela voir la méthode dans le corrigé de l'exercice 8), on obtient $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(u_1)$ où $u_1 = (1, 2)$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u_2)$ où $u_2 = (1, -2)$.

2. f n'est pas bijective.

3. (a) b_1 et b_2 sont deux vecteurs non proportionnels donc (b_1, b_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.
   (b) $f(b_1) = (-1; 2)$ et $f(b_2) = (-3; 6)$.
   $M_{(b),(e)}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.
   (c) $\det M_{(b),(e)}(f) = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$ donc $M_{(b),(e)}(f)$ n'est pas inversible.

Correction 13

1. Soient $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$.
   - $u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

   $$\begin{aligned} f(u_1 + u_2) &= ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2), (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)) \\ &= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2 + z_1 + z_2, y_1 + y_2 - z_1 - z_2) \\ &= (x_1 + y_1 + x_2 + y_2, x_1 - y_1 + z_1 + x_2 - y_2 + z_2, y_1 - z_1 + y_2 - z_2) \\ &= (x_1 + y_1, x_1 - y_1 + z_1, y_1 - z_1) + (x_2 + y_2, x_2 - y_2 + z_2, y_2 - z_2) \\ &= f(u_1) + f(u_2) \end{aligned}$$

   - $\ell.u_1 = (\ell x_1, \ell y_1, \ell z_1)$

   $$\begin{aligned} f(\ell.u_1) &= (\ell x_1 + \ell y_1, \ell x_1 - \ell y_1 + \ell z_1, \ell y_1 - \ell z_1) \\ &= (\ell(x_1 + y_1), \ell(x_1 - y_1 + z_1), \ell(y_1 - z_1)) \\ &= \ell(x_1 + y_1, x_1 - y_1 + z_1, y_1 - z_1) \\ &= \ell.f(u_1) \end{aligned}$$

2. - $$\begin{aligned} v = (x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f) &\Leftrightarrow f(v) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + y, x - y + z, y - z) = (0, 0, 0) \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & & & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow v = 0 \end{aligned}$$

   Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. Cela signifie que f est injective.

   Puisque $3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f)$, on en déduit $\dim \mathrm{Im}(f) = 3$ c'est-à-dire $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$. Autrement dit, f est surjective.

   La fonction f est donc bijective.

3. Avoir $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ signifie que f est injective.

   Avoir $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$ signifie que f est surjective.

   La fonction f est donc bijective.

4. (a) Pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a $u = x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1) = xe_1+ye_2+ze_3$ donc (e) est une famille géneratrice.

   De plus, $\det(e) = \det(e_1, e_2, e_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ la famille (e) est donc libre.

   En conclusion, (e) est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) $f(e_1) = (1,1,0)$, $f(e_2) = (-1,1,1)$ et $f(e_3) = (0,1,-1)$

   (c) $f(e_1) = (1,1,0) = 1.e_1 + 1.e_2 + 0.e_3$, $f(e_2) = (-1,1,1) = -1.e_1 + 1.e_2 + 1.e_3$ et $f(e_3) = (0,1,-1) = 0.e_1 + 1.e_2 - 1.e_3$

   Donc $M_{(e)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

5. (a) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\} = \{(x, x, z) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

   $= \{x.(1;1;0) + z.(0;0;1) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

   On pose $u_1 = (1;1;0)$ et $u_2 = (0;0;1)$.

   On a donc $G = \{x.u_1 + y.u_2 \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{\text{C.L. de } u_1 \text{ et } u_2\} = \text{Vect}(u_1, u_2)$.

   Autrement dit, (u_1, u_2) est une famille génératrice de G et G est le s.e.v engendré par u_1 et u_2.

   Puisque u_1 et u_2 ne sont pas proportionnels, la famille (u_1, u_2) est libre.

   D'où (u_1, u_2) est une base de G.

   (b) Il faut trouver un vecteur u_3 tel que $\det(u_1; u_2; u_3)$.

   Par exemple, si on prend $u_3 = (0;1;0)$, on a :

   $\det(u_1; u_2; u_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$

   (c) Par définition, $f(F) = \text{Vect}(f(u_1), f(u_2))$ On a $f(u_1) = (2;0;1)$ et $f(u_2) = (0;0;-1)$

   Puisque $(2;0;1)$ et $(0;0;-1)$ ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre et c'est donc une base de $f(F)$.