Université de Picardie Jules Verne

UFR d'économie et de gestion

Probabilités

Licence 2 - Semestre 3

Exercices d'entrainement **Intervalle de confiance** **Corrigés**

Correction 1

Rappel : $p \in I_c = [f - d_\alpha, f + d_\alpha]$ *où* $d_\alpha = d_\alpha \times \sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n-1}}$

avec $\alpha = 1 - c$ *où* c *est le niveau de confiance en décimal*

$f = \dfrac{n_i}{n}$ *est la fréquence de l'échantillon.*

z_α *lu dans la table la loi normale centrée réduite avec* $1 - \dfrac{\alpha}{2}$

Valeurs particulières qu'il faut mieux connaître par cœur :

Pour $c = 90\% = 0,90,$ *on a* $\alpha = 0,10,\ 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,95$ *et* $z_\alpha = \varphi^{-1}(0,95) = 1,65.$

Pour $c = 95\% = 0,95,$ *on a* $\alpha = 0,05,\ 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,975$ *et* $z_\alpha = \varphi^{-1}(0,975) = 1,96.$

Pour $c = 99\% = 0,99,$ *on a* $\alpha = 0,01,\ 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,995$ *et* $z_\alpha = \varphi^{-1}(0,995) = 2,58.$

i. $f = \dfrac{12}{40} = \dfrac{3}{10} = 0,3$

$d_\alpha = 1,65 \times \sqrt{\dfrac{0,3 \times 0,7}{39}} \approx 0,121.$

Donc $I_c = [0,179\,;\ 0,421]$ soit entre $17,9\%$ et $42,1\%$.

ii. $f = \dfrac{23}{60} \approx 0,383$

$d_\alpha = 1,35 \times \sqrt{\dfrac{0,383 \times 0,617}{59}} \approx 0.104.$

Donc $I_c = [0,279\,;\ 0,488]$ soit entre $27,9\%$ et $48,8\%$.

iii. $f = \dfrac{12+23}{60+40} = \dfrac{35}{100} = 0,35$

$d_\alpha = 1,65 \times \sqrt{\dfrac{0,35 \times 0,65}{99}} \approx 0,079.$

Donc $I_c = [0,271\,;\ 0,429]$ soit entre $27,1\%$ et $42,9\%$.

Correction 2

Rappel : si $np \geq 10$ *et* $n(1-p) \geq 10,$ *on peut estimer, au niveau de confiance* $c = 1 - \alpha$ *(ou au seuil* α*) que* $p \in I_c = [f - d_\alpha, f + d_\alpha]$ *où* $d_\alpha = z_\alpha \times \sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n-1}}$ *et* $z_\alpha = \varphi^{-1}\left(1 - \dfrac{\alpha}{2}\right).$

Ici $f_1 = 0,38$ $1 - f_1 = 0,62$ et $n = 1000$ pour le premier sondage et $f_2 = 0,36$ $1 - f_2 = 0,64$ et $n = 1000$ pour le second sondage. Nous sommes donc dans les conditions d'utilisation de la propriété. De plus, à un seuil de $\alpha = 0,05$ (valeur usuelle), on a $z_\alpha = 1,96$.

Au premier sondage, on a donc $d_\alpha = 1,96 \times \sqrt{\dfrac{0,38(1-0,38)}{1000-1}} \approx 0,03$ et $I_c = [\,0,35\,;\,0,41\,]$.

Au second sondage, on a donc $d_\alpha = 1,96 \times \sqrt{\dfrac{0,36(1-0,36)}{1000-1}} \approx 0,03$ et $I_c = [\,0,33\,;\,0,39\,]$.

La proportion p des votants qui nous intéresse se trouve à chaque fois dans ces intervalles à un niveau de confiance de 95%. Mais ces deux intervalles n'étant pas d'intersection vide, on ne peut rien conclure. On pourrait même avoir une augmentation des intentions de vote.

Correction 3

On a $\mu \in [\overline{x} - d_\alpha ; \overline{x} + d_\alpha]$ où $d_\alpha = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \times z_\alpha$.

Ici, $n = 49$ et $\overline{x} = 17,8$.

(a) Si $\alpha = 10\% = 0,1$, $1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,95$ et $z_\alpha = \varphi^{-1}(0,95) = 1,65$.

$d_\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{49}} \times 1,65 = 0,24$.

Donc $I_c = [17,8 - 0,24 ; 17,8 + 0,24] = [17,56\,;\,18,04]$

(b) Si $\alpha = 5\% = 0,05$, $1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,975$ et $z_\alpha = \varphi^{-1}(0,975) = 1,96$.

$d_\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{49}} \times 1,96 = 0,28$.

Donc $I_c = [17,8 - 0,28 ; 17,8 + 0,28] = [17,52\,;\,18,08]$

(c) Si $\alpha = 1\% = 0,01$, $1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,995$ et $z_\alpha = \varphi^{-1}(0,995) = 2,58$.

$d_\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{49}} \times 2,58 \approx 0,37$.

Donc $I_c = [17,8 - 0,37 ; 17,8 + 0,37] = [17,43\,;\,18,17]$

Correction 4

Puisque $n = 5+10+20+36+15+8+6 = 100 > 30$, on a $Ic = [\overline{x} - d_\alpha ; \overline{x} + d_\alpha]$ où $d_\alpha = \dfrac{s_c}{\sqrt{n}} \times z_\alpha$.

De plus, $\overline{x} = \dfrac{5 \times 77,5 + 10 \times 82,5 + 20 \times 87,5 + \ldots + 6 \times 107,5}{100} = \dfrac{9220}{100} = 92,2$.

Et, $\overline{x^2} = \dfrac{5 \times 77,5^2 + 10 \times 82,5^2 + 20 \times 87,5^2 + \ldots + 6 \times 107,5^2}{100} = \dfrac{855225}{100} = 8552,25$.

En outre, $V = s^2 = 8552,25 - 92,2^2 = 51,41$ et $s_c = \sqrt{s^2 \times \dfrac{n}{n-1}} = s \times \sqrt{\dfrac{n}{n-1}} \approx 7,21$.

D'où $d_\alpha \approx \dfrac{7,21}{\sqrt{100}} \times 1,96 \approx 1,41$

Enfin $I_c = [92,2 - 1,41\,;\,92,2 + 1,41] = [90,79\,;\,93,61]$.

Correction 5

1. $\overline{x} = \dfrac{260}{10} = 26$

   $\overline{x^2} = \dfrac{6794}{10} = 679,4$

   $s^2 = V = 679,4 - 26^2 = 3,4$

   $s_c^2 = 3,4 \times \dfrac{10}{9} \approx 3,778$

   $s_c = \sqrt{3,4 \times \dfrac{10}{9}} \approx \sqrt{3,778} \approx 1,9437$

   On a $\sigma^2 \in I_c = \left[\dfrac{n-1}{\chi^2_{\text{sup}}} s_c^2 ; \dfrac{n-1}{\chi^2_{\text{inf}}} s_c^2\right]$ où χ^2_{sup} est lu dans la table du χ^2 avec $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025$ et $d.d.l. = n-1 = 9$ et χ^2_{inf} lu dans la table du χ^2 avec $1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,975$ et $d.d.l. = n-1 = 9$

   On obtient, $\chi^2_{\text{inf}} = 2,7$ et $\chi^2_{\text{sup}} = 19,023$.

   D'où $I_c = [1,79\,;\ 12,59]$.

2. $\overline{x} = \dfrac{1325}{50} = 26,5$

   $\overline{x^2} = \dfrac{35225}{50} = 704,5$

   $s^2 = V = 679,4 - 26^2 = 2,25$

   $s_c^2 = 2,25 \times \dfrac{50}{49} \approx 2,296$

   $s_c = \sqrt{2,25 \times \dfrac{50}{49}} \approx \sqrt{2,296} \approx 1,515$

   On a $\sigma^2 \in I_c = \left[\dfrac{n-1}{\chi^2_{\text{sup}}} s_c^2 ; \dfrac{n-1}{\chi^2_{\text{inf}}} s_c^2\right]$ où χ^2_{sup} est lu dans la table du χ^2 avec $\dfrac{\alpha}{2}$ et $n-1$ et χ^2_{inf} lu dans la table du χ^2 avec $1 - \dfrac{\alpha}{2}$ et $n-1$

   On obtient les valeurs du χ^2 par interpolation linéaire (en examen, on prendra simplement la valeur du χ^2 pour $d.d.l. = 50$ et non pas 49) :

   Pour $n = 40$ et $1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,975$, on obtient $24,433$.

   Pour $n = 50$ et $1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,975$, on obtient $32,357$.

   Donc $\chi^2_{\text{inf}} = 24,433 + \dfrac{9}{10}(32,357 - 24,433) = 31,6546$

   Pour $n = 40$ et $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025$, on obtient $59,342$.

   Pour $n = 50$ et $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025$, on obtient $71,42$.

   Donc $\chi^2_{\text{sup}} = 59,342 + \dfrac{9}{10}(71,42 - 59,342) = 70.2122$

   D'où $I_c = [1,6\,;\ 3,55]$.