Université de Picardie Jules Verne

UFR d'économie et de gestion

Probabilités

Licence 2 - Semestre 3

Exercices d'entrainement **Lois et approximation** **Corrigés**

Correction 1

1. (a) $p(X \geq 8) = 1 - p(X \leq 8) = 1 - p\left(\frac{X-7}{2,2} \leq \frac{8-7}{2,2}\right)$
$\approx 1 - p(Z \leq 0,45) \approx 1 - 0,6736 \approx 0,3264 = 32,64\%.$

   (b) $p(5 \leq X \leq 10) = p\left(\frac{5-7}{2,2} \leq \frac{X-7}{2,2} \leq \frac{10-7}{2,2}\right) \approx p(-0,91 \leq Z \leq 1,36)$
$= p(Z \leq 1,36) - p(Z \leq -0,91)$
$= \varphi(1,36) - \varphi(-0,91) = \varphi(1,36) - (1 - \varphi(0,91))$
$\approx 0,9131 - (1 - 0,8186) = 0,7267$
$= 72,67\%.$

2. $p(X \leq a) = 82\% = 0,82 \;\Leftrightarrow\; p\left(\frac{X-7}{2,2} \leq \frac{a-7}{2,2}\right) = 0,82$

$\Leftrightarrow\; p\left(Z \leq \frac{a-7}{2,2}\right) = 0,82$

$\Leftrightarrow\; \varphi\left(\frac{a-7}{2,2}\right) = 0,82 = \varphi(0,92)$

$\Leftrightarrow\; \frac{a-7}{2,2} \approx 0,92$ et $a \approx 2,024 + 7 \approx 9.$

Correction 2

Les résultats à un test de compétence sont distribués normalement avec une moyenne de 9 et un écart-type de $2,6$.

1. (a) $p(X \geq 11) = p\left(\frac{X-9}{2,6} \geq \frac{11-9}{2,6}\right) \approx p(Z \geq 0,77)$
$= 1 - p(Z \leq 0,77) \approx 1 - 0,7794 \approx 0,2206 = 22,06\%.$

   (b) $p(5 \leq X \leq 10) = p\left(\frac{5-9}{2,6} \leq \frac{X-9}{2,6} \leq \frac{10-9}{2,6}\right) \approx p(-1,54 \leq Z \leq 0,38)$
$= p(Z \leq 0,38) - p(Z \leq -1,54)$
$= \varphi(0,57) - \varphi(-1,54) = \varphi(0,57) - (1 - \varphi(1,54))$
$=\approx 0,6480 - (1 - 0,9418) = 0,5898$
$= 58,98\%.$

2. $p(X \leq a) = 81\% = 0,81 \;\Leftrightarrow\; p\left(\dfrac{X-9}{2,6} \leq \dfrac{a-9}{2,6}\right) = 0,81$

$$\Leftrightarrow\; p\left(Z \leq \frac{a-9}{2,6}\right) = 0,81$$

$$\Leftrightarrow\; \varphi\left(\frac{a-9}{2,6}\right) = 0,81 = \varphi(0,88)$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{a-9}{2,6} \approx 0,88 \text{ et } a \approx 2,288 + 9 \approx 11,3.$$

Correction 3

1. (a) $p(X \geq 9) = p\left(\dfrac{X-8}{2,1} \geq \dfrac{9-8}{2,1}\right) \approx p(Z \geq 0,48)$

$$1 - p(Z \leq 0,48) \approx 1 - 0,6844 \approx 0,3156 = 31,56\%.$$

   (b) dont le résultat est compris entre 5 et 10.

$$\begin{aligned} p(5 \leq X \leq 10) = p\left(\frac{5-8}{2,1} \leq \frac{X-8}{2,1} \leq \frac{10-8}{2,1}\right) &\approx p(-1,43 \leq Z \leq 0,95) \\ &= p(Z \leq 0,95) - p(Z \leq -1,43) \\ &= \varphi(0,95) - \varphi(-1,43) = \varphi(0,95) - (1-\varphi(1,43)) \\ &\approx 0,8289 - (1 - 0,9236) = 0,7525 \\ &= 75,25\%. \end{aligned}$$

2. Calculer le score a tel que 75% des résultats obtenus à ce test soient inférieurs à a.

$p(X \leq a) = 75\% = 0,75 \;\Leftrightarrow\; p\left(\dfrac{X-8}{2,1} \leq \dfrac{a-8}{2,1}\right) = 0,75$

$$\Leftrightarrow\; p\left(Z \leq \frac{a-8}{2,1}\right) = 0,75$$

$$\Leftrightarrow\; \varphi\left(\frac{a-8}{2,1}\right) = 0,75 \approx \varphi(0,67)$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{a-8}{2,1} \approx 0,67 \text{ et } a \approx 1,407 + 8 \approx 9,4.$$

Correction 4

1. $\dfrac{96407}{100000} = 0,96407 = \varphi(1,8)$ et $\dfrac{256}{100000} = 0,00256 = 1 - 0,99744 = 1 - \varphi(2,8)$.

   On a donc $\dfrac{108-\mu}{\sigma} = 1,8$ et $\dfrac{118-\mu}{\sigma} = 2,8$.

   Soit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 108-\mu &=& 1,8\sigma \\ 118-\mu &=& 2,8\sigma \end{array}\right.$$

   C'est-à-dire $\sigma = 10$ et $\mu = 90$.

2. (a) $P(X < 85) = \varphi\left(\dfrac{85-90}{10}\right) = \varphi(-0,5)$

$$= 1 - \varphi(0,5) = 1 - 0,69146 = 0,30854$$

(b) $P(X > 100) = 1 - P(X \leq 100) = 1 - \varphi\left(\dfrac{100-90}{10}\right) = 1 - \varphi(1)$
$= 1 - 0,84134 = 0,15866.$

(c) $P(85 \leq X \leq 100) = P(X \leq 100) - P(X < 85) = 0,84134 - 0,15866 = 0,68268.$

Correction 5

1. X suit une loi hypergéométrique $\mathscr{H}(N;n;p)$ avec $N = 8000$ et $p = \dfrac{3}{8}$.

   On a $p(X = k) = \dfrac{\dbinom{3000}{k} \times \dbinom{5000}{n-k}}{\dbinom{8000}{n}}$.

2. $E(X) = np = \dfrac{3n}{8}$ et $V(X) = \dfrac{N-n}{N-1} np(1-p) = \dfrac{8000-n}{7999} \times \dfrac{15n}{64}$.

3. Rappel : On peut approximer une loi hypergéométrique $\mathscr{H}(N;n;p)$ par une loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$ dès que $10n < N$.

   (a) On a bien $320 < 8000$ donc on peut approximer X par une loi $\mathscr{B}\left(32; \dfrac{3}{8}\right)$.

   (b) $P(X < 15) = \displaystyle\sum_{k=0}^{14} P(X = k) = \sum_{k=0}^{14} \binom{32}{k} \frac{3^k \times 5^{32-k}}{8^{32}}$.

   (c) $P(X > 11) = 1 - P(X \leq 11) = 1 - \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{11} \binom{32}{k} \frac{3^k \times 5^{32-k}}{8^{32}}\right)$

4. Rappel : On peut approximer une loi binomiale $Y \sim \mathscr{B}(n;p)$ par une loi normale $\widetilde{Y} \sim \mathscr{N}\left(np; \sqrt{np(1-p)}\right)$ dès que $n > 30$, $np > 5$ et $n(1-p) > 5$. Dans ce cas, $P(Y < t)$ est approché par $P(\widetilde{Y} < t - 0,5)$ et $P(Y \leq t)$ est approché par $P(\widetilde{Y} < t + 0,5)$.

   (a) On a bien $3200 < 8000$ donc on peut approximer X par une loi $\mathscr{B}\left(320; \dfrac{3}{8}\right)$. Cette dernière pouvant aussi être approximée par une loi normale $\mathscr{N}(\mu;\sigma)$ avec :
   $\mu = E\left(\mathscr{B}(n;p)\right) = np = 120$
   $\sigma = \sqrt{V\left(\mathscr{B}(n;p)\right)} = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{120 \times \dfrac{5}{8}} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \approx 8,66.$

   (b) $P(X < 110) = \varphi\left(\dfrac{110 - 0,5 - 120}{8,66}\right) \approx 1 - \varphi(1,21) \approx 1 - 0,8869 \approx 0,1131.$

   (c) $P(X > 125) = 1 - P(X \leq 125) = 1 - \varphi\left(\dfrac{125 + 0,5 - 120}{8,66}\right) \approx 1 - \varphi(0,64) \approx 1 - 0,7389 \approx 0,2611$

Correction 6

1. On peut voir X comme un système de tirage sans remise. En effet, on dispose d'un lot de N parmi lequel il y a $0,2$ % de pots avariés et $99,8$ % de pots non avariés. Parmi ces N pots, on en choisit 1000 (tirage sans remise) et on compte le nombre de pots avariés parmi ces 1000 pots. On reconnait donc que une loi hypergéométrique de paramètres $\mathscr{H}(N; 1000; 0,002)$.

2. Pour que X soit approchable par une loi binomiale il faut que $N > 10 \times 1000 = 10000$. Dans ce cas, X est approximé par une loi $\mathscr{B}(1000; 0,002)$.

   De plus, puisque $1000 \geq 30$ et $0,002 \leq 0,1$, cette loi binomiale est aussi approximable par la loi de Poisson de paramètre $1000 \times 0,002 = 2$.

3. La table de la loi de Poisson nous donne $p(X \leq 4) \approx p(Z \leq 4) \approx 0,9473$.

Correction 7

1. La probabilité qu'un employé soit au téléphone à un instant t est $\dfrac{6}{60} = \dfrac{1}{10}$ (il y a 60 minutes dans une heure).

2. X est le nombre de réussites dans la répétition d'une épreuve de Bernouilli (un employé est au téléphone). La v.a.r. X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(300; 0,1)$.

3. On cherche N tel que que $p(X \geq N) \leq 0,025$.

   Puisque $300 > 30$, $300 \times 0,1 = 30 > 5$ et $300 \times 0,9 = 270 > 5$, on peut approcher la loi de X par la loi normale de moyenne 30 et d'écart-type $\sqrt{27}$. De plus, la loi de $\dfrac{X-30}{\sqrt{27}}$ est approchable par la loi normale centrée réduite.

   On a alors :

   $$\begin{aligned} & p(X \geq N) \leq 0,025 \\ \Leftrightarrow\ & p\left(\frac{X-30}{\sqrt{27}} \geq \frac{N-30}{\sqrt{27}}\right) \leq 0,025 \end{aligned}$$

   Par approximation par la loi normale, on obtient

   $$\begin{aligned} & 1 - \varphi\left(\frac{N-30}{\sqrt{27}}\right) \leq 0,025 \\ \Leftrightarrow\ & \varphi\left(\frac{N-30}{\sqrt{27}}\right) \geq 0,975 \approx \varphi(1,96) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{N-30}{\sqrt{27}} \geq 1,96 \\ \Leftrightarrow\ & N \geq \sqrt{27} \times 1,96 + 30 \approx 40,18. \end{aligned}$$

   L'entreprise doit installer au moins 41 lignes téléphoniques.

Correction 8

1. Un téléphone sortant de l'entreprise a la probabilité $0,006$ d'être défectueux. La v.a.r. X_n compte le nombre de réalisations dans la répétition n fois d'une expérience de Bernouilli avec la probabilité $0,006$ de succès.

   La v.a.r. X_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n; 0,006)$.

2. On a $n = 500 \geq 30$ et $0,006 \leq 0,1$: on peut approcher la loi de X_{500} par la loi de Poisson de paramètre $500 \times 0,006 = 3$.

   La table de la loi de Poisson nous donne $p(X \leq 2) \approx 0,4232$.

Correction 9

1. X compte le nombre de réalisations de l'événement "obtenir 6" au cours de 9000 répétitions d'une expérience de Bernouilli avec une probabilité $\dfrac{1}{6}$ de succès.

   X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(\left(9000, \dfrac{1}{6}\right)$.

2. On a $9000 > 30$, $9000 \times \dfrac{1}{6} > 5$ et $9000 \times \dfrac{5}{6} > 5$.

   On peut approcher la loi de X par la loi normale de moyenne 1500 et de variance 1250 et la loi de $\dfrac{X - 1500}{\sqrt{1250}}$ par la loi normale centrée réduite.

3. On veut calculer $p(1400 \leq X \leq 1600)$.

   - *Sans correction de continuité :*

   $$\begin{aligned} p(1400 \leq X \leq 1600) &= P\left(\frac{1400-1500}{\sqrt{1250}} \leq X^* \leq \frac{1600-1500}{\sqrt{1250}}\right) \\ &\approx p(-2,83 \leq X^* \leq 2,83) \\ &\approx \varphi(2,83) - \varphi(-2,83) \\ &\approx 2\varphi(2,83) - 1 \approx 0,9954 \end{aligned}$$

   - *Avec correction de continuité :*

   $$\begin{aligned} p(1400 \leq X \leq 1600) &= p(1399,5 \leq X \leq 1600,5) \\ &= P\left(\frac{-100,5}{\sqrt{1250}} \leq X^* \leq \frac{100,5}{\sqrt{1250}}\right) \\ &\approx p(-2,84 \leq X^* \leq 2,84) \\ &\approx \varphi(2,84) - \varphi(-2,84) \\ &\approx 2\varphi(2,84) - 1 \approx 0,9954 \end{aligned}$$

   On remarque qu'il n'y a aucune différence si on utilise la correction de continuité ou si on ne l'utilise pas.