



1 Mathématiques

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2m+2 & m+1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\det A$ et le factoriser.
2. Discuter suivant les valeurs de m de l'inversibilité de la matrice A .

Exercice 2

Calculer le déterminant des familles (a) et (b) suivantes :

- (i) $(a) = (a_1; a_2; a_3)$ avec $a_1 = (-1, 1, 1)$, $a_2 = (1, -2, 1)$ et $a_3 = (0, 0, -1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
- (ii) $(b) = (b_1; b_2; b_3)$ avec $b_1 = (1, 2, 0)$, $b_2 = (-1, 2, 3)$ et $b_3 = (-1, 6, 6)$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -3 & 11 & \lambda \\ 4 & -16 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de λ , la matrice A est-elle inversible?
2. On pose $\lambda = 4$. Déterminer A^{-1} .

3. Résoudre le système
$$\begin{cases} x & - & 3y & - & 2z & = & 1 \\ -3x & + & 11y & + & 4z & = & -1 \\ 4x & - & 16y & - & 3z & = & -1 \end{cases} \quad (1)$$

en utilisant une équation matricielle.

2 Probabilités

Exercice 4

Soient X et Y deux variables aléatoires qui peuvent prendre chacune les valeurs 0, 1 et 2.

1. Comment doit-on choisir le nombre réel p pour que le tableau suivant donne une loi conjointe du couple (X, Y) ?

	0	1	2
0	p	$\frac{p}{2}$	$\frac{p}{4}$
1	$2p$	p	$\frac{p}{2}$
2	$4p$	$2p$	p

2. Quelles sont alors les lois marginales de X et de Y ?
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer l'espérance de $Z = X.Y$.
5. Déterminer la loi de X conditionnée par $(Y=1)$.

Exercice 5

Un dé A est parfaitement équilibré et porte le nombre 1 sur quatre de ses faces et le nombre -2 sur les deux autres faces. Soit X la variable aléatoire qui, à un lancer du dé A , associe le nombre obtenu.

Un dé B porte les nombres $-2, -1, 0, 1, 2$ et 3 . Ce dé n'est pas équilibré. Les probabilités d'apparition de chaque face forment, dans l'ordre indiqué, une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Soit Y la variable aléatoire qui, à un lancer du dé B , associe le nombre obtenu.

1. Quelles sont ces probabilités?
2. On lance une fois, simultanément, les deux dés A et B et on désigne par S la variable aléatoire qui, au lancer des deux dés, associe la valeur absolue de la somme des nombres obtenus.
 - (a) Donner la loi du couple (X, S) .
 - (b) Quelle est la loi marginale de S ?
 - (c) X et S sont-elles indépendantes?