Université de Picardie Jules Verne

UFR d'économie et de gestion

Mathématiques - Probabilités

Licence 2

TD 2 **Enoncés** **Semestre 3**

---

1 Mathématiques

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2m+2 & m+1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\det A$ et le factoriser.
2. Discuter suivant les valeurs de m de l'inversibilité de la matrice A.

Exercice 2

Calculer le déterminant des familles (a) et (b) suivantes :

(i) $(a) = (a_1; a_2; a_3)$ avec $a_1 = (-1, 1, 1)$, $a_2 = (1, -2, 1)$ et $a_3 = (0, 0, -1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

(ii) $(b) = (b_1; b_2; b_3)$ avec $b_1 = (1, 2, 0)$, $b_2 = (-1, 2, 3)$ et $b_3 = (-1, 6, 6)$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -3 & 11 & \lambda \\ 4 & -16 & -3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de λ, la matrice A est-elle inversible?
2. On pose $\lambda = 4$. Déterminer A^{-1}.
3. Résoudre le système $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & - & 2z & = & 1 \\ -3x & + & 11y & + & 4z & = & -1 \\ 4x & - & 16y & - & 3z & = & -1 \end{array} \right. \quad (1)$

   en utilisant une équation matricielle.

2 Probabilités

Exercice 4

Soient X et Y deux variables aléatoires qui peuvent prendre chacune les valeurs 0, 1 et 2.

1. Comment doit-on choisir le nombre réel p pour que le tableau suivant donne une loi conjointe du couple (X, Y)?

	0	1	2
0	p	$\frac{p}{2}$	$\frac{p}{4}$
1	$2p$	p	$\frac{p}{2}$
2	$4p$	$2p$	p

2. Quelles sont alors les lois marginales de X et de Y?
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer l'espérance de $Z = X.Y$.
5. Déterminer la loi de X conditionnée par $(Y{=}1)$.

Exercice 5

Un dé A est parfaitement équilibré et porte le nombre 1 sur quatre de ses faces et le nombre -2 sur les deux autres faces. Soit X la variable aléatoire qui, à un lancer du dé A, associe le nombre obtenu.
Un dé B porte les nombres -2, -1, 0, 1, 2 et 3. Ce dé n'est pas équilibré. Les probabilités d'apparition de chaque face forment, dans l'ordre indiqué, une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Soit Y la variable aléatoire qui, à un lancer du dé B, associe le nombre obtenu.

1. Quelles sont ces probabilités?
2. On lance une fois, simultanément, les deux dés A et B et on désigne par S la variable aléatoire qui, au lancer des deux dés, associe la valeur absolue de la somme des nombres obtenus.
   (a) Donner la loi du couple (X, S).
   (b) Quelle est la loi marginale de S?
   (c) X et S sont-elles indépendantes?