



Université de Picardie Jules Verne
UFR d'économie et de gestion

Mathématiques

Licence 2 - Semestre 4

Exercices d'entraînement

Equations différentielles

Corrigés

Correction 1

C'est une équation différentielle du premier ordre où y est une fonction de x .
De plus, c'est une équation à variables séparables.

En effet, on obtient $y' = \frac{2x^2}{x^3 + 1}$.

Pour trouver y , il suffit d'intégrer :

$$y = \int \frac{2x^2}{x^3 + 1} dx = \frac{2}{3} \ln(x^3 + 1) + c \text{ où } c \text{ est une constante réelle.}$$

Correction 2

C'est une équation différentielle du premier ordre où y est une fonction de t .
De plus, c'est une équation à variables séparables.

En effet, on obtient $y' = y^2 \sin t$ puis $\frac{y'}{y^2} = \sin t$.

Une primitive de $\frac{y'}{y^2}$ est $-\frac{1}{y}$ et une primitive de $\sin t$ est $-\cos t$.

En intégrant l'équation à variables séparées, on obtient $\frac{1}{y} = \cos t + c$ où c est une constante réelle.

Ou encore $y = \frac{1}{\cos t + c}$ où $c \in \mathbb{R}$.

Correction 3

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre où y est une fonction de x .

(i) L'équation sans second membre est $x^2 y' + (1 - 2x)y = 0$.

C'est une équation à variables séparables.

On obtient $x^2 y' = (2x - 1)y$ puis $\frac{y'}{y} = \frac{2x - 1}{x^2} = 2 \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$.

En intégrant de chaque côté, il s'en suit que $\ln |y| = 2 \ln x + \frac{1}{x} + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

C'est-à-dire $y = \pm e^{\frac{1}{x} + 2 \ln x + c} = \pm e^{\ln x^2} e^c e^{1/x}$

En posant $k = \pm e^c$, on obtient que k est une constante qui varie sur $\mathbb{R}$.

La solution générale de l'équation sans second membre est donc $y = kx^2 e^{1/x}$.

- (ii) On cherche une solution particulière sous la forme $y_0 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

On a $y'_0 = 2\alpha x + \beta$.

En remplaçant dans l'équation différentielle avec second membre, on obtient :

$$x^2(2\alpha x + \beta) + (1 - 2x)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = x^2$$

$$\text{Soit } (\alpha - \beta)x^2 + (\beta - 2\gamma)x + \gamma = x^2$$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} \alpha - \beta &= 1 \\ \beta - 2\gamma &= 0 \\ \gamma &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha &= 1 \\ \beta &= 0 \\ \gamma &= 0 \end{cases}$$

Donc $y_0 = x^2$ est une solution particulière (on pourra le vérifier rapidement pour être convaincu).

- (iii) La solution générale s'obtient simplement comme somme des résultats des deux étapes précédente : $y = kx^2e^{1/x} + x^2$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Correction 4

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre où y est une fonction de x .

- (i) L'équation sans second membre est $y' + y = 0$.

Puisqu'une primitive de 1 est x , la solution est $y = ke^{-x}$ où $k \in \mathbb{R}$.

- (ii) On cherche une solution particulière de la forme $y_0 = k(x)e^{-x}$ où cette fois-ci k est une fonction de x .

$$\text{On a } y'_0 = k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x}.$$

En remplaçant dans l'équation différentielle avec second membre, on obtient :

$$k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x} + ke^{-x} = \cos x.$$

$$\Leftrightarrow k'(x)e^{-x} = \cos x$$

$$\Leftrightarrow k'(x) = e^x \cos x$$

$$\Leftrightarrow k(x) = \int e^x \cos x \, dx$$

Pour obtenir $k(x)$, on peut faire deux intégrations par parties successives.

Une autre méthode consiste à se dire que $k(x)$ doit être sous la forme $k(x) = (r \cos x + s \sin x)e^x$ où r et s sont des réels à trouver.

$$\text{On a alors } k'(x) = (-r \sin x + s \cos x)e^x + (r \cos x + s \sin x)e^x = ((s+r) \cos x + (s-r) \sin x)e^x$$

$$\text{On a donc } s + r = 1 \text{ et } s - r = 0 \text{ c'est-à-dire } r = s = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Et, } k(x) = \left(\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right) e^x$$

$$\text{Enfin, } y_0 = k(x)e^{-x} = \left(\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right) e^x e^{-x} = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x$$

- (iii) La solution générale est $y = ke^{-x} + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x$ où $k \in \mathbb{R}$.

Correction 5

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre où x est une fonction de t .

- (i) L'équation sans second membre est $x' + x \tan t = 0$.

Puisqu'une primitive de $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$ est $-\ln |\cos t|$, la solution est $y = ke^{\ln |\cos t|}$ ou encore $y = k \cos t$ où $k \in \mathbb{R}$.

- (ii) On cherche une solution particulière de la forme $x_0 = k(t) \cos t$ où cette fois-ci k est une fonction de t .

$$\text{On a } x'_0 = k'(t) \cos t - k(t) \sin t.$$

En remplaçant dans l'équation différentielle avec second membre, on obtient :

$$k'(t) \cos t - k(t) \sin t + k(t) \cos t \tan t = e^t \cos t.$$

$$\Leftrightarrow k'(t) \cos t = e^t \cos t.$$

$$\Leftrightarrow k'(t) = e^t.$$

$$\Leftrightarrow k(t) = e^t.$$

$$\text{Enfin, } x_0 = k(t) \cos t = e^t \cos t$$

- (iii) La solution générale est $x = k \cos t + e^t \cos t = (k + e^t) \cos t$ où $k \in \mathbb{R}$.

- (iv) La condition initiale implique $k + 1 = 0$ c'est-à-dire $k = -1$.

$$\text{Autrement dit, } x = (e^t - 1) \cos t$$

Correction 6

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre où y est une fonction de x .

- (i) L'équation sans second membre est $(x+1)y' + y = 0$ c'est-à-dire $y' + \frac{1}{x+1}y = 0$.

Puisqu'une primitive de $\frac{1}{x+1}$ est $\ln |x+1|$, la solution est $y = ke^{-\ln |x+1|}$ où $k \in \mathbb{R}$.

Ou encore $y = \frac{k}{x+1}$ où $k \in \mathbb{R}$.

- (ii) On cherche une solution particulière de la forme $y_0 = \frac{k(x)}{x+1}$ où cette fois-ci k est une fonction de x .

$$\text{On a } y'_0 = \frac{k'(x)(x+1) - k(x)}{(x+1)^2}.$$

En remplaçant dans l'équation différentielle avec second membre, on obtient :

$$(x+1) \frac{k'(x)(x+1) - k(x)}{(x+1)^2} + \frac{k(x)}{x+1} = (x+1) \sin x.$$

$$\Leftrightarrow k'(x) = (x+1) \sin x$$

$$\Leftrightarrow k(x) = \int (x+1) \sin x \, dx$$

On intègre par partie :

$$\begin{aligned} u &= x + 1 & v' &= \sin x \\ u' &= 1 & v &= -\cos x \end{aligned}$$

$$k(x) = [-(x+1)\cos x] + \int \cos x \, dx = -(x+1)\cos x + \sin x.$$

$$\text{Enfin, } y_0 = \frac{k(x)}{x+1} = \frac{\sin x}{x+1} - \cos x.$$

(iii) La solution générale est $y = \frac{k}{x+1} + \frac{\sin x}{x+1} - \cos x$ où $k \in \mathbb{R}$.

(iv) La condition initiale implique $k - 1 = 0$ c'est-à-dire $k = 1$.

$$\text{Autrement dit, } y = \frac{1}{x+1} + \frac{\sin x}{x+1} - \cos x.$$

Correction 7

La variation relative instantanée est $\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{2}{100}$.

D'où $f(t) = ke^{2t/100}$ où $k \in \mathbb{R}$.

La condition initiale implique $ke^{30/100} = 12$ autrement dit $k = 12e^{-30/100}$. Donc $f(t) = 12e^{-30/100}e^{2t/100} = 12e^{2t-30/100}$.

Correction 8

C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.

L'équation caractéristique est $x^2 + 3x - 10 = 0$.

Son discriminant est $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-10) = 49 = 7^2$.

Les deux racines réelles sont $x_1 = \frac{-3-7}{2} = -5$ et $x_2 = \frac{-3+7}{2} = 2$.

La solution générale de l'équation est $y = \lambda e^{-5x} + \mu e^{2x}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Correction 9

C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants avec second membre.

(i) L'équation sans second membre $y'' + y' - 12y = 0$.

L'équation caractéristique est $x^2 + x - 12 = 0$.

Son discriminant est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-12) = 49 = 7^2$.

Les deux racines réelles sont $x_1 = \frac{-1-7}{2} = -4$ et $x_2 = \frac{-1+7}{2} = 3$.

La solution générale de l'équation est $y = \lambda e^{-4x} + \mu e^{3x}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(ii) Puisque $c = -12 \neq 0$, on cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de même degré que $x + 1$.

On pose donc $y_0 = \alpha x + \beta$ et on a $y'_0 = \alpha$ et $y''_0 = 0$.

En remplaçant dans l'équation, on obtient :

$$0 + \alpha - 12(\alpha x + \beta) = 4x + 3$$

$$\Leftrightarrow -12\alpha x - 12\beta + \alpha = 4x + 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -12\alpha &= 4 \\ -12\beta + \alpha &= 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha &= -\frac{1}{3} \\ \beta &= -\frac{5}{18} \end{cases}$$

$$\text{Donc } y_0 = -\frac{1}{3}x - \frac{5}{18}$$

(iii) La solution générale de l'équation avec second membre est $y = \lambda e^{-4x} + \mu e^{3x} - \frac{1}{3}x - \frac{5}{18}$.

(iv) On a $y' = -4\lambda e^{-4x} + 3\mu e^{3x} - \frac{1}{3}$.

Les conditions initiales impliquent :

$$\begin{cases} \lambda + \mu - \frac{5}{18} &= -\frac{1}{36} \\ -4\lambda + 3\mu - \frac{1}{3} &= -\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu &= \frac{1}{4} \\ -4\lambda + 3\mu &= -\frac{5}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda &= \frac{1}{6} \\ \mu &= \frac{1}{12} \end{cases}$$

$$\text{On a donc } y = \frac{1}{6}e^{-4x} + \frac{1}{12}e^{3x} - \frac{1}{3}x - \frac{5}{18}.$$

Correction 10

C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants avec second membre.

(i) L'équation sans second membre $y'' - 2y' = 0$.

L'équation caractéristique est $x^2 - 2x = 0$.

Les deux racines réelles sont $x_1 = 0$ et $x_2 = 2$.

La solution générale de l'équation est $y = \lambda e^{2x} + \mu$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(ii) Puisque $c = 0$ et $b \neq 0$, on cherche une solution particulière sous la forme $y_0 = x(\alpha x + \beta) = \alpha x^2 + \beta x$.

On a $y'_0 = 2\alpha x + \beta$ et $y''_0 = 2\alpha$.

En remplaçant dans l'équation, on obtient :

$$\begin{aligned} 2\alpha - 2(2\alpha x + \beta) &= 4x + 3 \\ \Leftrightarrow -4\alpha x + 2\alpha - 2\beta &= 4x + 3 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -4\alpha &= 4 \\ 2\alpha - 2\beta &= 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha &= -1 \\ \beta &= -\frac{5}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } y_0 = -x^2 - \frac{5}{2}x$$

(iii) La solution générale de l'équation avec second membre est $y = \lambda e^{2x} + \mu - x^2 - \frac{5}{2}x$.

(iv) On a $y' = 2\lambda e^{2x} - 2x - \frac{5}{2}$.

Les conditions initiales impliquent :

$$\begin{cases} \lambda + \mu &= 0 \\ 2\lambda - \frac{5}{2} &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda &= \frac{7}{4} \\ \mu &= -\frac{7}{4} \end{cases}$$

On a donc $y = \frac{7}{4}e^{2x} - \frac{7}{4} - x^2 - \frac{5}{2}x$.

Correction 11

C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants avec second membre.

(i) L'équation sans second membre $y'' + 2y' - 8y = 0$.

L'équation caractéristique est $x^2 + 2x - 8 = 0$.

Son discriminant est $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 36 = 6^2$.

Les deux racines réelles sont $x_1 = \frac{-2-6}{2} = -4$ et $x_2 = \frac{-2+6}{2} = 2$.

La solution générale de l'équation est $y = \lambda e^{-4x} + \mu e^{2x}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(ii) Puisque $c = -12 \neq 0$, on cherche une solution particulière sous la forme $y_0 = (\alpha x + \beta)e^{3x}$.

On a $y'_0 = \alpha e^{3x} + 3(\alpha x + \beta)e^{3x} = (3\alpha x + \alpha + 3\beta)e^{3x}$.

Et $y''_0 = 3\alpha e^{3x} + (9\alpha x + 3\alpha + 9\beta)e^{3x} = (9\alpha x + 6\alpha + 9\beta)e^{3x}$.

En remplaçant dans l'équation, on obtient :

$$(7\alpha x + 8\alpha + 7\beta)e^{3x} = (7x + 1)e^{3x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7\alpha &= 7 \\ 8\alpha + 7\beta &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha &= 1 \\ \beta &= -1 \end{cases}$$

Donc $y_0 = (x - 1)e^{3x}$.

(iii) La solution générale de l'équation avec second membre est $y = \lambda e^{-4x} + \mu e^{2x} + (x - 1)e^{3x}$.

(iv) On a $y' = -4\lambda e^{-4x} + 2\mu e^{2x} + e^{3x} + 3(x - 1)e^{3x}$.

Les conditions initiales impliquent :

$$\begin{cases} \lambda + \mu - 1 &= 0 \\ -4\lambda + 2\mu - 2 &= 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda &= -\frac{1}{3} \\ \mu &= \frac{4}{3} \end{cases}$$

On a donc $y = -\frac{1}{3}e^{-4x} + \frac{4}{3}e^{2x} + (x - 1)e^{3x}$.