Université de Picardie Jules Verne

UFR d'économie et de gestion

Mathématiques

Licence 2 - Semestre 4

Exercices d'entrainement **Formes quadratiques** **Corrigés**

Correction 1

$q(x, y, z) = -4x^2 - 5y^2 - 3z^2 - 2xz + 4yz + 6xy$

On a $A = M_e(q) = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Et on a :

- $|A_1| = -4 < 0$
- $|A_2| = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 20 - 9 = 11 > 0$
- $|A_3| = \begin{vmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -4.\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 3.\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - 1.\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -44 + 21 - 1 < 0$

Donc q est définie négative.

Correction 2

On utilise les règles : $a^2 + 2ab = (a + b)^2 - b^2$ et $a^2 - 2ab = (a - b)^2 - b^2$.

$$\begin{aligned}
q(x, y, z) &= x^2 + 29y^2 + 3z^2 - 10xy + 2xz - 22yz \\
&= x^2 + 2x(-5y + z) + 29y^2 + 3z^2 - 22yz \\
&= (x + (-5y + z))^2 - (-5y + z)^2 + 29y^2 + 3z^2 - 22yz \\
&= (x + (-5y + z))^2 - (25y^2 - 10yz + z^2) + 29y^2 + 3z^2 - 22yz \\
&= (x + (-5y + z))^2 + 4y^2 - 12yz + 2z^2 \\
&= (x + (-5y + z))^2 + (2y)^2 - 2 \times 2y \times 3z + 2z^2 \\
&= (x + (-5y + z))^2 + (2y - 3z)^2 - (3z)^2 + 2z^2 \\
&= (x + (-5y + z))^2 + (2y - 3z)^2 - 7z^2
\end{aligned}$$

La signature de q est $(2, 1)$: q est donc ni définie ni de signe constant.

Correction 3

$$\begin{aligned}
q(x, y, z) &= 5x^2 + y^2 + 11z^2 + 4xy - 10xz - 6yz \\
&= y^2 + 4xy - 6yz + 5x^2 - 10xz + 11z^2 \\
&= y^2 + 2y(2x - 3z) + 5x^2 - 10xz + 11z^2 \\
&= (y + (2x - 3z))^2 - (2x - 3z)^2 + 5x^2 - 10xz + 11z^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (y+2x-3z)^2 - 4x^2 + 12xz - 9z^2 + 5x^2 - 10xz + 11z^2 \\
&= (y+2x-3z)^2 + x^2 + 2xz + 2z^2 \\
&= (y+2x-3z)^2 + (x+z)^2 - z^2 + 2z^2 \\
&= (y+2x-3z)^2 + (x+z)^2 + z^2
\end{aligned}$$

La signature de q est $(3,0)$: q est donc définie et positive.

Correction 4

$q(x,y,z) = 4x^2 + 7z^2 + 4y^2 + 8xz - 10yz - 4xy$

1. $q(x,y,z) = [2x + (2z-y)]^2 + 3\,(y-z)^2$

   La signature de q est $(2,0)$: elle est positive mais pas définie.

2. La matrice de la forme quadratique dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 7 \end{pmatrix}$.

   D'où $|A_1| = 4 > 0$,

   $|A_2| = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12 > 0$

   Et $|A_3| = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \\ -6 & -5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = 0.$