Université de Picardie Jules Verne

UFR d'économie et de gestion

Mathématiques

Licence 2 - Semestre 4

Exercices d'entrainement **Intégration** **Corrigés**

Correction 1

(a) La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ est continue sur $[0;1]$. On peut donc bien calculer l'intégrale.

De plus, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$.

(b) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln t}$ est continue sur $[2;3]$. On peut donc bien calculer l'intégrale.

De plus, $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t = [\ln|\ln t|]_2^3 = \ln(\ln(3)) - \ln(\ln(2)) = \ln\left(\frac{\ln(3)}{\ln(2)}\right)$.

(c) La fonction $x \mapsto x^3\ln x$ est continue sur $[1;3]$. On peut donc bien calculer l'intégrale.

On effectue une intégration par partie :

$$u(x) = \ln x \quad u'(x) = \frac{1}{x}$$
$$v'(x) = x^3 \quad v(x) = \frac{x^4}{4}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1;3]$.

On a donc $\displaystyle\int_1^3 x^3\ln x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4\ln x}{4}\right]_1^3 - \int_1^3 \frac{x^3}{4}\,\mathrm{d}x = \frac{81\ln 3}{4} - \left[\frac{x^4}{16}\right]_1^3 = \frac{81\ln 3}{4} - 5$.

(d) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x(1+x)}\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ est continue sur $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$.

Si $u = \dfrac{x}{x+1}$ alors $\mathrm{d}u = \dfrac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$ et u varie entre $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{2}$.

On a donc
$$\int_{1/2}^1 \frac{1}{x(1+x)}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \int_{1/3}^{1/2} \frac{1}{u}\ln u\,\mathrm{d}u = \left[\frac{(\ln u)^2}{2}\right]_{1/3}^{1/2} = \frac{(\ln 2)^2 - (\ln 3)^2}{2}$$

(e) Pour tout $x \in [-1;0]$ $x^2 - x \geq 0$ et pour $x \in [0;1]$, $x^2 - x \leq 0$.

Donc $\displaystyle\int_{-1}^1 |x^2-x|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 (x^2-x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (x-x^2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1$.

Correction 2

La fonction f est continue par morceaux sur $[0;3]$.
On peut donc bien calculer l'intégrale de f sur cet intervalle.

$$\begin{aligned}\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t + \int_1^2 t\,\mathrm{d}t + \int_2^3 (-2t+5)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^2 + [-t^2+5t]_2^3 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{4}{2} - \frac{1}{2} + 6 - 6 = \frac{11}{6}\end{aligned}$$

Correction 3

La fonction f est continue par morceaux par $[1;2]$.

$$\begin{aligned}\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_1^{\sqrt{2}} (t-1)\,\mathrm{d}t + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 2(t-1)\,\mathrm{d}t + \int_{\sqrt{3}}^2 3(t-1)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{2}t^2 - t\right]_1^{\sqrt{2}} + 2\left[\frac{1}{2}t^2 - t\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} + 3\left[\frac{1}{2}t^2 - t\right]_{\sqrt{3}}^2 \\ &= 1 - \sqrt{2} - \frac{1}{2} + 1 + 3 - 2\sqrt{3} - 2 + 2\sqrt{2} + 6 - 6 - \frac{9}{2} + 3\sqrt{3} \\ &= -2 + \sqrt{3} + \sqrt{2}\end{aligned}$$

Correction 4

1. On a $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{-1}{2(x+1)} + \dfrac{1}{2(x-1)}$
2. Donc $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_2^3 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2}\left[\ln|t+1|\right]_2^3 + \frac{1}{2}\left[\ln|t-1|\right]_2^3 \\ &= \frac{\ln 3 - \ln 4}{2} + \frac{\ln 2}{2} \\ &= \frac{\ln 3 - \ln 2}{2}\end{aligned}$$

Correction 5

1. Méthode 1 : On effectue la somme $\dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{x+3} + \dfrac{c}{(x+3)^2}$ puis on identifie les numérateurs de l'équation.

$$\begin{aligned}\frac{x^2-6x-17}{(x-2)(x+3)^2} &= \frac{a(x+3)^2}{(x-2)(x+3)^2} + \frac{b(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+3)^2} + \frac{c(x-2)}{(x-2)(x+3)^2} \\ &= \frac{a(x+3)^2 + b(x-2)(x+3) + c(x-2)}{(x-2)(x+3)^2} \\ &= \frac{a(x^2+6x+9) + b(x^2+x-6) + c(x-2)}{(x-2)(x+3)^2}\end{aligned}$$

$$= \frac{(a+b)x^2 + (6a+b+c)x + (9a-6b-2c)}{(x-2)(x+3)^2}$$

On a donc : $\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} a & + & b & & & = & 1 & \\ 6a & + & b & + & c & = & -6 & L_2 \leftarrow L_2 - 6L_1 \\ 9a & - & 6b & - & 2c & = & -17 & L_3 \leftarrow L_3 - 9L_1 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} a & + & b & & & = & 1 & \\ & & -5b & + & c & = & -12 & \\ & & -15b & - & 2c & = & -26 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & & & = & 1 \\ & & -5b & + & c & = & -12 \\ & & & & -5c & = & 10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} a & = & -1 \\ b & = & 2 \\ c & = & -2 \end{array}\right.$$

Méthode 2 : On obtient directement les valeurs de a, b et c, en effectuant les calculs suivants :

On multiplie l'équation par $(x-2)$, on obtient :

$$\frac{x^2-6x-17}{(x+3)^2} = a + \frac{b(x-2)}{x+3} + \frac{c(x-2)}{(x+3)^2}$$

On pose $x = 2$, cette nouvelle équation devient $\dfrac{4-12-17}{5^2} = a$ c'est-à-dire $a = -1$.

On multiplie l'équation initiale par $(x+3)^2$, on obtient :

$$\frac{x^2-6x-17}{x-2} = \frac{a(x+3)^2}{x-2} + b(x+3) + c$$

On pose $x = -3$, cette nouvelle équation devient $\dfrac{9+18-17}{-5} = c$ c'est-à-dire $c = -2$.

On multiplie l'équation initiale par $(x+3)$, on obtient :

$$\frac{x^2-6x-17}{(x-2)(x+3)} = \frac{a(x+3)}{x-2} + b + \frac{c}{(x+3)}$$

On regarde la limite quand x tend vers $+\infty$ de chacun des membres de cette nouvelle équation, on obtient : $1 = a + b$ c'est-à-dire $b = 2$.

2. On a donc $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2-6x-17}{(x-2)(x+3)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 -\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+3} - \frac{2}{(x+3)^2}\,\mathrm{d}x$

   Soit $I = \left[-\ln|x-2| + 2\ln|x+3| + \dfrac{2}{x+3}\right]_0^1$

   $I = -\ln|-1| + 2\ln|4| + \dfrac{2}{4} - (-\ln|-2| + 2\ln|3| + \dfrac{2}{3})$

   $I = 4\ln(2) + \dfrac{1}{2} + \ln(2) - 2\ln(3) - \dfrac{2}{3} = 5\ln(2) - 2\ln(3) - \dfrac{1}{6}$

Correction 6

$$\int_1^2 (2x+1)\ln x\,\mathrm{d}x$$

On pose :

$u = \ln x \qquad v' = 2x+1$

$u' = \dfrac{1}{x} \qquad v = x^2 + x$

$$\int_1^2 (2x+1)\ln x \,\mathrm{d}x = \left[(x^2+x)\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 x+1 \,\mathrm{d}x$$
$$= 6\ln 2 - \left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_1^2 = 6\ln 2 - 4 + \frac{1}{2} + 1 = 6\ln 2 - \frac{5}{2}$$

Correction 7

$$\int_{-1}^0 (2x+1)e^{2x} \,\mathrm{d}x$$

On pose :

$$u = 2x+1 \qquad v' = e^{2x}$$
$$u' = 2 \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\int_{-1}^0 (2x+1)e^{2x} \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}(2x+1)e^{2x}\right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 e^{2x} \,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2} - \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-1}^0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2} = e^{-2}$$

Correction 8

$$\int_{1/2}^2 2(x+1)\ln(2x) \,\mathrm{d}x$$

On pose :

$$u = \ln(2x) \qquad v' = 2x+2$$
$$u' = \frac{1}{x} \qquad v = x^2+2x$$

$$\int_{1/2}^2 2(2x+1)\ln 2x \,\mathrm{d}x = \left[\left(x^2+2x\right)\ln(2x)\right]_{1/2}^2 - \int_{1/2}^2 x+2 \,\mathrm{d}x$$
$$= 8\ln 4 - \left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{1/2}^2 = 8\ln 4 - 6 + \frac{1}{8} + 1 = 8\ln 4 - \frac{39}{8}$$

Correction 9

$$\int_0^1 2x\, e^{2x+1} \,\mathrm{d}x$$

On pose :

$$u = 2x \qquad v' = e^{2x+1}$$
$$u' = 2 \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x+1}$$

$$\int_0^1 2x\, e^{2x+1} \,\mathrm{d}x = \left[xe^{2x+1}\right]_0^1 - \int_0^1 e^{2x+1} \,\mathrm{d}x$$
$$= e^3 - \left[\frac{1}{2}e^{2x+1}\right]_0^1 = e^3 + \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e^3 = \frac{1}{2}e^3 + \frac{1}{2}e$$

Correction 10

$$I = \lim_{x \to +\infty} \int_2^x \frac{3}{t^2} \,\mathrm{d}t$$

$$\int_2^x \frac{3}{t^2} \,\mathrm{d}t = \left[-\frac{3}{t}\right]_2^x = -\frac{3}{x} + \frac{3}{2}$$

$I = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{2} - \frac{3}{x} = \frac{3}{2}$

Correction 11

$I = \lim_{x \to 2} \int_1^x \frac{2}{\sqrt{2-t}} \, \mathrm{d}t$

$\int_1^x \frac{2}{\sqrt{2-t}} \, \mathrm{d}t = \left[-4\sqrt{2-t}\right]_1^x = -4\sqrt{2-x} + 4\sqrt{2-1} = 4 - 4\sqrt{2-x}$

$I = \lim_{x \to 2} 4 - 4\sqrt{2-x} = 4$

Correction 12

$I = \lim_{x \to +\infty} \int_2^x \frac{2}{t^3} \, \mathrm{d}t$

$\int_2^x \frac{2}{t^3} \, \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t^2}\right]_2^x = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2^2}$

$I = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{4} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$

Correction 13

$I = \lim_{x \to 5} \int_4^x \frac{5}{\sqrt{5-t}} \, \mathrm{d}t$

$\int_4^x \frac{5}{\sqrt{5-t}} \, \mathrm{d}t = \left[-10\sqrt{5-t}\right]_4^x = -10\sqrt{5-x} + 10\sqrt{5-4} = 10 - 10\sqrt{5-x}$

$I = \lim_{x \to 5} 10 - 10\sqrt{5-x} = 10$