Université de Picardie Jules Verne

UFR d'économie et de gestion

Mathématiques

Licence 2 - Semestre 4

Exercices d'entrainement **Optimisation** **Enoncés**

Exercice 1

Déterminer les ensembles de définition et les dérivées partielles premières des fonctions suivantes :

a. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R};\ (x, y, z) \mapsto z\ln(x^2 + y^2)$

b. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R};\ (x, y, z) \mapsto 2x\sqrt{y^5} + 3xz^2e^{x^3}$

c. $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R};\ (x, y, z) \mapsto 6xe^y\sqrt{z} - \dfrac{y}{z^2}$

Exercice 2

Etudier les extrema locaux de la fonction définie par :
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R};\ (x, y, z) \mapsto \dfrac{1}{2}x^4 + 4xy + y^2 + z^2 - 2z.$

Exercice 3

Etudier les extrema locaux de la fonction définie par :
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R};\ (x, y, z) \mapsto e^{x^2} + y^2 - 2yz + 2z^2 - 2z.$

Exercice 4

Etudier les extrema locaux de la fonction f définie par :
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R};\ (x, y, z) \mapsto y\ln(z)e^{x^2+y^2} + x^2.$

Exercice 5

Etudier les extrema locaux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ (x, y) \mapsto x^3y^2$ sous la contrainte $g(x, y) = x + y - 1 = 0$.

a. Par substitution

b. En utilisant le multiplicateur de Lagrange

Exercice 6

Etudier les extrema locaux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ (x, y) \mapsto x^3y - x^2 + 6x + y^2 - y$ sous la contrainte $g(x, y) = 2x - y - 1 = 0$.

a. Par substitution

b. En utilisant le multiplicateur de Lagrange

Exercice 7

On cherche à étudier un extremum local de la fonction f de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x^2y^2 + z^3$ sous la contrainte $g(x, y, z) = 2x + 2y - z^3 + 6 = 0$.

1. Vérifier que $\left(1; -1; -1; \sqrt[3]{2}\right)$ est un point critique.

2. Donner la matrice hessienne bordée du Lagrangien.

3. Quelle est la nature du point critique?

Exercice 8

En utilisant le multiplicateur de Lagrange (et uniquement de cette façon), étudier les extrema locaux de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; \ (x, y, z) \mapsto x \ln x^2 + y \ln y + z \ln z$ sous la contrainte $g(x, y, z) = x + y + z - 6 = 0$.