Université de Picardie Jules Verne

UFR d'économie et de gestion

Mathématiques

Licence 2 - Semestre 4

Exercices d'entrainement **Suites récurrentes** **Corrigés**

Correction 1

La suite u est arithmético-géométrique.

1. On cherche une solution particulière de la forme d'une constante.
   On cherche donc ℓ telle que $\ell = \frac{1}{3}\ell + 1$ i.e. $\ell = \frac{3}{2}$.
   La solution générale est donc $u_n = k\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}$ où $k \in \mathbb{R}$.
   Puisque $u_0 = 1$, on a donc $k + \frac{3}{2} = 1$ et $k = -\frac{1}{2}$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{3}{2}$.

Correction 2

Soit n le nombre de mois de placement et soit c_n le capital au bout de n mois.
On a c_0 et $c_{n+1} = \left(1 + \frac{2}{1000}\right)c_n + 500$.
Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique.
On cherche une solution particulière sous la forme d'une constante ℓ.
On cherche donc ℓ tel que $\ell = \left(1 + \frac{2}{1000}\right)\ell + 500$ soit $\ell = -250\,000$.
La solution générale est donc $c_n = k \times \left(1 + \frac{2}{1000}\right)^n - 250\,000$ avec $k \in \mathbb{R}$.
Puisque $c_0 = 10\,000$, on obtient $k - 250\,000 = 10\,000$ c'est-à-dire $k = 260\,000$.
Autrement dit, $c_n = 260\,000 \times \left(1 + \frac{2}{1000}\right)^n - 250\,000$.
On cherche $c_{60} = 260\,000 \times \left(1 + \frac{2}{1000}\right)^{60} - 250\,000 \approx 43114,05$.

Correction 3

Soit c_n le capital disponible au bout de n années.
On a $c_0 = S$ et $c_{n+1} = 1,02c_n - 50\,000$.
Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique.
On cherche une solution particulière sous la forme d'une constante ℓ.
On cherche donc ℓ tel que $\ell = 1,02\ell - 50\,000$ c'est-à-dire $\ell = \frac{50\,000}{0,02} = 2\,500\,000$.

La solution générale est donc $c_n = k \times (1,02)^n + 2\,500\,000$ avec $k \in \mathbb{R}$.
On a :
$S = c_0 = k \times (1,02)^0 - 250\,000 = k + 2\,500\,000$
$0 = c_{25} = k \times (1,02)^{25} - 250\,000 \approx 1,64k + 2\,500\,000$
D'où $k = -\dfrac{2\,500\,000}{1,64} \approx -1\,524\,390$.
Et $S = 975\,610$.

Correction 4

1. On cherche une solution particulière de la forme $\ell \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.

   On cherche donc ℓ telle que $\ell \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1} = \dfrac{1}{2}\ell \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^n + 2 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.

   Après simplification, on obtient $2\ell = 5\ell + 20$ c'est-à-dire $\ell = -\dfrac{20}{3}$.

   La solution générale est donc $u_n = k \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n - \dfrac{20}{3}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$ où $k \in \mathbb{R}$.

   Puisque $u_0 = 2$, on a donc $k - \dfrac{20}{3} = 2$ et $k = \dfrac{26}{3}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Correction 5

1. On cherche une solution particulière de la forme $\ell \times n \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

   On cherche donc ℓ telle que $\ell \times (n+1) \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1} = \dfrac{1}{4}\ell \times n \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n + 3 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

   Après simplification, on obtient $\ell \times (n+1) = \ell \times n + 12$ c'est-à-dire $\ell = 12$.

   La solution générale est donc $u_n = k \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n + 12n\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ où $k \in \mathbb{R}$.

   Puisque $u_0 = 1$, on a donc $k = 1$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Correction 6

L'équation caractéristique est $x^2 - 3\sqrt{2}\,x + 9 = 0$.
$\Delta = (-3\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 9 = -18 = (3i\sqrt{2})^2$
$x_1 = \dfrac{3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.
Rappel :
Si $z = \alpha + i\beta$ alors $|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ et l'argument de z vérifie $\cos(\arg z) = \dfrac{\alpha}{|z|}$ et $\sin(\arg z) = \dfrac{\beta}{|z|}$.

On a $\rho = |x_1| = |x_2| = \sqrt{\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{36}{4}} = \sqrt{9} = 3$.

On cherche $\theta = \arg(z)$ tel que $\cos(\arg z) = \dfrac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\arg z) = \dfrac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ c'est-à-dire $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

On obtient donc que $u_n = 3^n \left(k.\cos\dfrac{n\pi}{4} + \ell\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$ où $k,\ \ell \in \mathbb{R}$.

Correction 7

L'équation caractéristique est $x^2 - 8\sqrt{3}x + 64 = 0$.
$\Delta = (8\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 64 = -64 = (8i)^2$
$x_1 = \dfrac{8\sqrt{3} - 8i}{2} = 4\sqrt{3} - 4i$ et $x_2 = \dfrac{8\sqrt{3} + 8i}{2} = 4\sqrt{3} + 4i$.
Rappel :
Si $z = \alpha + i\beta$ alors $|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ et l'argument de z vérifie $\cos(\arg z) = \dfrac{\alpha}{|z|}$ et $\sin(\arg z) = \dfrac{\beta}{|z|}$.

On a $\rho = |x_1| = |x_2| = \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{48 + 16} = \sqrt{64} = 8$.

On cherche $\theta = \arg(z)$ tel que $\cos(\arg z) = \dfrac{4\sqrt{3}}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\arg z) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$ c'est-à-dire $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

On obtient donc que $u_n = 8^n \left(k.\cos\dfrac{n\pi}{6} + \ell\sin\dfrac{n\pi}{6}\right)$ où $k,\ \ell \in \mathbb{R}$.

Correction 8

L'équation caractéristique est $x^2 + 3x - 18 = 0$.
$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-18) = 9 + 72 = 81 = 9^2$
$x_1 = \dfrac{-3 - 9}{2} = -6$ et $x_2 = \dfrac{-3 + 9}{2} = 3$.
On obtient donc que $u_n = k.(-6)^n + \ell.3^n$ où $k,\ \ell \in \mathbb{R}$.

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0 \\ u_1 & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} k + \ell & = & 0 \\ -6k + 3\ell & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} k & = & -\dfrac{1}{9} \\ \ell & = & \dfrac{1}{9} \end{array}\right.$$

C'est-à-dire $u_n = -\dfrac{1}{9}.(-6)^n + \dfrac{1}{9}.3^n$

Correction 9

L'équation caractéristique est $x^2 + 2x + 2 = 0$.
$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 = (2i)^2$
$x_1 = \dfrac{-2 - 2i}{2} = -1 - i = \sqrt{2}e^{5i\pi/4}$ et $x_2 = \dfrac{-2 + 2i}{2} = -1 + i = \sqrt{2}e^{3i\pi/4}$.

On obtient donc que $u_n = \sqrt{2}^n \left(k.\cos\dfrac{3n\pi}{4} + \ell\sin\dfrac{3n\pi}{4}\right)$ où $k,\ \ell \in \mathbb{R}$.

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} k & = & 1 \\ \sqrt{2}\left(k\dfrac{-\sqrt{2}}{2} + \ell\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} k & = & 1 \\ \ell & = & 2 \end{array}\right.$$

C'est-à-dire $u_n = \sqrt{2}^n \left(\cos\dfrac{3n\pi}{4} + 2\sin\dfrac{3n\pi}{4}\right)$

Correction 10

(i) L'équation caractéristique est $x^2 + x - 6 = 0$.

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 = 5^2$

$x_1 = \dfrac{-1-5}{2} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-1+5}{2} = 2$.

La solution générale de l'équation sans second membre est :

$u_n = k.(-3)^n + \ell.2^n$ où $k,\ \ell \in \mathbb{R}$.

(ii) Puisque 5 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme $s_n = \alpha 5^n$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

En remplaçant dans l'équation (1), on obtient :

$$\begin{aligned} & \alpha 5^{n+2} + \alpha 5^{n+1} - 6\alpha 5^n = 5^n \\ \Leftrightarrow\ & 5^2\alpha + 5\alpha - 6\alpha = 1 \\ \Leftrightarrow\ & 24\alpha = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \alpha = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

Et donc $s_n = \dfrac{1}{24}5^n$

(iii) La solution générale de l'équation (1) est donc

$u_n = k.(-3)^n + \ell.2^n + \dfrac{1}{24}5^n$ où $k,\ \ell \in \mathbb{R}$.

Les valeurs de k et ℓ sont données par les conditions initiales.

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k + \ell + \dfrac{1}{24} = 1 \\ -3k + 2\ell + \dfrac{5}{24} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{51}{120} = \dfrac{17}{40} \\ \ell = \dfrac{8}{15} \end{cases}$$

C'est-à-dire $u_n = \dfrac{17}{40}.(-3)^n + \dfrac{8}{15}.2^n + \dfrac{1}{24}5^n$

Correction 11

(i) L'équation caractéristique est $x^2 + 5x - 6 = 0$.

$\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 49 = 7^2$

$x_1 = \dfrac{-5-7}{2} = -6$ et $x_2 = \dfrac{-5+7}{2} = 1$.

La solution générale de l'équation sans second membre est :

$u_n = k.(-6)^n + \ell.1^n = k.(-6)^n + \ell$ où $k,\ \ell \in \mathbb{R}$.

(ii) Le second membre est $(n+1) \times 1^n$ c'est-à-dire le produit de 1^n par un polynôme de degré 1. Puisque 1 est racine simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme $s_n = n(\alpha n + \beta)1^n = \alpha n^2 + \beta n$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

En remplaçant dans l'équation (1), on obtient :

$$\alpha(n+2)^2 + \beta(n+2) + 5(\alpha(n+1)^2 + \beta(n+1)) - 6(\alpha n^2 + \beta n) = n+1$$
$$\Leftrightarrow\ 14\alpha n + 9\alpha + 7\beta = n+1$$
$$\Leftrightarrow\ \alpha = \frac{1}{14} \text{ et } \beta = \frac{5}{98}.$$

Et donc $s_n = \dfrac{1}{14}n^2 + \dfrac{5}{98}n$

(iii) La solution générale de l'équation (1) est donc

$u_n = k.(-6)^n + \ell + \dfrac{1}{14}n^2 + \dfrac{5}{98}n$ où $k,\ \ell \in \mathbb{R}$.

Les valeurs de k et ℓ sont données par les conditions initiales.

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0 \\ u_1 & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} k+\ell & = & 0 \\ -6k+\ell+\dfrac{1}{14}+\dfrac{5}{98} & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} k & = & -\dfrac{43}{343} \\ \ell & = & \dfrac{43}{343} \end{array}\right.$$

C'est-à-dire $u_n = u_n = -\dfrac{43}{343}.(-6)^n + \dfrac{43}{343} + \dfrac{1}{14}n^2 + \dfrac{5}{98}n$