Université de Picardie Jules Verne

UFR d'économie et de gestion

Probabilités

Licence 2 - Semestre 4

Exercices d'entrainement **V.a.r à densité** **Corrigés**

Correction 1

1. (i) La fonction f est positive sur $]-\infty;1[$ (car $0 \geq 0$).
   Pour $t \geq 1$, on a $4t^{-5} = \dfrac{4}{t^5} \geq 0$ donc f est positive sur $\mathbb{R}$.

   (ii) La fonction nulle est continue sur $]-\infty;1[$.
   La fonction $t \mapsto \dfrac{4}{t^5}$ est continue sur $[1;+\infty[$.
   Donc f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

   (iii) Comme $f = 0$ sur $]-\infty;1[$, on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
   Puisque $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, on doit donc calculer $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
   Puisque f est continue sur $[1;+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ne pose problème qu'en $+\infty$.
   On doit donc évaluer $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \int_{1}^{A} f(t)\,\mathrm{d}t$ (avec $A > 1$ pour simplifier).
   $$\int_{1}^{A} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{1}^{A} \frac{4}{t^5}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{t^4}\right]_1^A = \frac{-1}{A^4} + 1$$
   Or $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \frac{-1}{A^4} + 1 = 1$.
   L'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc convergente et vaut bien 1.

   La fonction f est une densité de probabilité.

   Soit X une v.a.r. de densité f et soit F sa fonction de répartition.

   Par définition $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

   - Si $x < 1$ alors $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$.
   - Si $x \geq 1$ alors $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{x} 4t^{-5}\,\mathrm{d}t = 0 + \frac{-1}{x^4} + 1 = 1 - \frac{1}{x^4}$.

   (Inutile de refaire le calcul de l'intégrale, il a déjà été fait dans le point (iii).)

   On a donc $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^4} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

2. (i) La fonction g est positive sur $]-\infty;0[$ (car $0 \geq 0$).
   Pour $t \geq 0$, on a $4te^{-2t} \geq 0$ donc g est positive sur $\mathbb{R}$.

   (ii) La fonction nulle est continue sur $]-\infty;0[$.
   Par produit de fonctions continues, la fonction $t \mapsto 4te^{-2t}$ est continue sur $]0;+\infty[$.
   Donc g est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
   Puisque dans le théorème, il suffit que la fonction soit continue sauf éventuellement en un nombre fini de points, nous ne sommes pas obligés de vérifier la continuité de g en 0.
   Néanmoins, $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = 0 = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = g(0)$ donc g est en fait continue sur $\mathbb{R}$.

   (iii) Puisque $g = 0$ sur $]-\infty;0[$, on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} g(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
   Puisque $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} g(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$, on doit donc calculer $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$.
   Puisque g est continue sur $[0;+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ ne pose problème qu'en $+\infty$.
   On doit donc évaluer $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \int_{0}^{A} g(t)\,\mathrm{d}t$ (avec $A > 0$ pour simplifier).
   Par intégration par parties, en posant $u = -2t$ et $v' = -2e^{-2t}$, on obtient :
   $\displaystyle\int_{0}^{A} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{A} 4te^{-2t}\,\mathrm{d}t = \left[-2te^{-2t}\right]_0^A + \int_{0}^{A} 2e^{-2t}\,\mathrm{d}t = -2Ae^{-2A} - e^{-2A} + 1$
   Or $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} -2Ae^{-2A} - e^{-2A} + 1 = 1$.
   L'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ est donc convergente et vaut bien 1.

La fonction g est une densité de probabilité.

Soit X une v.a.r. de densité g et soit G sa fonction de répartition.

Par définition $G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$.

- Si $x < 0$ alors $G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$.
- Si $x \geq 0$ alors $G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} 4te^{-2t}\,\mathrm{d}t = 0 - 2xe^{-2x} - e^{-2x} + 1 = 1 - (2x+1)e^{-2x}$.

(Toujours inutile de refaire le calcul, il a été fait dans le point (iii).)

On a donc $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (2x+1)e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

3. (i) La fonction h est positive sur $]-\infty;0[$ (car $0 \geq 0$).
   Pour $t \geq 0$, on a $\dfrac{3}{2}e^{-t/2}\left(1 - e^{-t/2}\right)^2 \geq 0$ donc h est positive sur $\mathbb{R}$.

   (ii) La fonction nulle est continue sur $]-\infty;0[$.
   Par produit de fonctions continues, la fonction $t \mapsto \dfrac{3}{2}e^{-t/2}\left(1 - e^{-t/2}\right)^2$ est continue sur $]0;+\infty[$. Donc h est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
   De plus, et même si cela n'est pas nécessaire, $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = 0 = \lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = h(0)$ donc h est en fait continue sur $\mathbb{R}$.

(iii) Puique $h = 0$ sur $]-\infty; 0[$, on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} h(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Puisque h est continue sur $[0; +\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$ ne pose problème qu'en $+\infty$.

On doit donc évaluer $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \int_{0}^{A} h(t)\,\mathrm{d}t$ (avec $A > 0$ pour simplifier).

$$\int_{0}^{A} \frac{3}{2} e^{-t/2} \left(1 - e^{-t/2}\right)^2 \,\mathrm{d}t = \left[(1 - e^{-t/2})^3\right]_0^A = (1 - e^{-A/2})^3$$

Or $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} (1 - e^{-A/2})^3 = 1$.

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut 1.

Donc h est une densité de probabilité.

Soit X une v.a.r. de densité h et soit H sa fonction de répartition.

Par définition $H(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} h(t)\,\mathrm{d}t$.

- Si $x < 0$ alors $H(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$.
- Si $x \geq 0$ alors $H(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} \frac{3}{2} e^{-t/2} \left(1 - e^{-t/2}\right)^2 \,\mathrm{d}t = (1 - e^{-x/2})^3$.

(Toujours inutile de refaire le calcul, il a été fait dans le point (iii).)

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-x/2})^3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Correction 2

1. Rappel : $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$

   Si $x \in]-\infty; 1[$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$

   Si $x \in [1; 2]$,
   $$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 0 + \int_{1}^{x} \frac{11}{12} - \frac{1}{e^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\left(\frac{11}{12} - \frac{1}{e^2}\right) t\right]_1^x = \left(\frac{11}{12} - \frac{1}{e^2}\right) \times (x - 1) \end{aligned}$$

   En particulier, $F(2) = \displaystyle\int_{-\infty}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{11}{12} - \frac{1}{e^2}\right) \times (2 - 1) = \frac{11}{12} - \frac{1}{e^2}$

   Si $x \in]2; +\infty[$,
   $$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{11}{12} - \frac{1}{e^2} + \int_{2}^{x} \frac{2}{t^4} + \frac{1}{e^t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{11}{12} - \frac{1}{e^2} + \int_{2}^{x} 2t^{-4} + e^{-t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{11}{12} - \frac{1}{e^2} + \left[-\frac{2}{3}t^{-3} - e^{-t}\right]_2^x \\
&= \frac{11}{12} - \frac{1}{e^2} + \left[-\frac{2}{3t^3} - \frac{1}{e^t}\right]_2^x \\
&= \frac{11}{12} - \frac{1}{e^2} - \frac{2}{3x^3} - \frac{1}{e^x} + \frac{1}{12} + \frac{1}{e^2} \\
&= 1 - \frac{2}{3x^3} - \frac{1}{e^x}
\end{aligned}
$$

2. $$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}t + \int_1^2 \frac{11}{12} - \frac{1}{e^2}\,\mathrm{d}t + \int_2^{+\infty} \frac{2}{t^4} + \frac{1}{e^t}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{x\,\to\,+\infty} \int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}t + \int_1^2 \frac{11}{12} - \frac{1}{e^2}\,\mathrm{d}t + \int_2^{x} \frac{2}{t^4} + \frac{1}{e^t}\,\mathrm{d}t. \\
&= \lim_{x\,\to\,+\infty} F(x) = \lim_{x\,\to\,+\infty} 1 - \frac{2}{3x^3} - \frac{1}{e^x} = 1.
\end{aligned}
$$

3. $E(X) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{1} t\times 0\,\mathrm{d}t + \int_1^2 t \times \left(\frac{11}{12} - \frac{1}{e^2}\right)\mathrm{d}t + \int_2^{+\infty} t\times\left(\frac{2}{t^4} + \frac{1}{e^t}\right)\mathrm{d}t$

   On a :

   - $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} t\times 0\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}t = 0$
   - $\displaystyle\int_1^2 t\times\left(\frac{11}{12} - \frac{1}{e^2}\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\times\left(\frac{11}{12} - \frac{1}{e^2}\right)\right]_1^2 = \frac{3}{2}\times\left(\frac{11}{12} - \frac{1}{e^2}\right)$
   - $\displaystyle\int_2^{+\infty} t\times\left(\frac{2}{t^4} + \frac{1}{e^t}\right)\mathrm{d}t = \int_2^{+\infty} \frac{2}{t^3} + te^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_2^{+\infty} \frac{2}{t^3}\,\mathrm{d}t + \int_2^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$

     avec :

     $$\int_2^{+\infty} 2t^{-3}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\,\to\,+\infty} \int_2^x 2t^{-3}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\,\to\,+\infty} \left[-t^{-2}\right]_2^x = \lim_{x\,\to\,+\infty} -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

     et (en utilisant une intégration par partie) :

     $$\int_2^x te^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-te^{-t}\right]_2^x + \int_2^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-te^{-t}\right]_2^x - \left[e^{-t}\right]_2^x = (-x-1)e^{-x} + 3e^{-2}$$

     (On pourra remarquer que $(-t-1)e^{-t}$ est une primitive de te^{-t})

     d'où :

     $$\int_2^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\,\to\,+\infty} \int_2^x te^{-t}\,\mathrm{d}t = 3e^{-2} = \frac{3}{e^2}$$

   Donc $E(X) = \dfrac{3}{2}\times\left(\dfrac{11}{12} - \dfrac{1}{e^2}\right) + \dfrac{3}{e^2} = \dfrac{33}{24} + \dfrac{3}{2e^2}$

Correction 3

(i) Pour que la fonction f soit positive il faut que $a \geq 0$.

(ii) La fonction nulle est continue sur $]-\infty;1]$ et sur $]2;+\infty[$.
La fonction $t \mapsto \dfrac{a}{\sqrt{t-1}}$ est continue sur $]1;2]$ pour toute valeur de a.
Quelle que soit la valeur de a, f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

(iii) Comme $f = 0$ sur $]-\infty;1]$ et sur $]2;+\infty[$, on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

La fonction f est continue sur $]1;2]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t$ ne pose problème qu'en 1.

On doit donc évaluer $\displaystyle\lim_{x \to 1} \int_{x}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t$ avec $1 < x \leq 2$.

$$\int_{x}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x}^{2} \frac{a}{\sqrt{t-1}}\,\mathrm{d}t = \left[2a\sqrt{t-1}\right]_{x}^{2} = 2a - 2a\sqrt{x-1}$$

Or $\displaystyle\lim_{x \to 1} 2a - 2a\sqrt{x-1} = 2a$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut $2a$.

Pour que f soit une densité de probabilité il faut donc que $2a = 1$ c'est-à-dire $a = \dfrac{1}{2}$.

Correction 4

1. (i) La fonction nulle est continue sur $]-\infty;0[$.
Par produit de fonctions continues, la fonction $x \mapsto 1 - \left(1+\dfrac{x}{2}\right)^2 e^{-x}$ est continue sur $]0;+\infty[$.
Donc F est continue sur $\mathbb{R}^*$.
Mais il **faut** vérifier que F est continue en 0.
C'est bien le cas car on a $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} F(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} F(x) = F(0) = 1 - 1 = 0$.

(ii) De même que la continuité sur $\mathbb{R}^*$, F est de classe $\mathscr{C}^1$ su $\mathbb{R}^*$.

(iii) Sur $]-\infty;0[$, F est constante donc croissante.
Sur $]0;+\infty[$, $F'(x) = -\left(1+\dfrac{x}{2}\right)e^{-x} + \left(1+\dfrac{x}{2}\right)^2 e^{-x} = \dfrac{x}{2}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)e^{-x}$.
Donc pour $x > 0$, $F'(x) \geq 0$ et donc F est croissante sur $]0;+\infty[$.
F est croissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ et, puisque F est continue sur $\mathbb{R}$, F est croissante sur $\mathbb{R}$.

(iv) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} 0 = 0$.

En utilisant les croissances comparées, on a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{x}{2}\right)^2 e^{-x} = 0$.
Et donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

F est bien la fonction de répartition d'une variable à densité X.

Il suffit de prendre la dérivée de F pour obtenir une densité.
On a déjà fait ce calcul dans le point (iii).

Une densité de X est $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{2}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

2. (i) La fonction $x \mapsto 1+e^x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ (c'est-à-dire dérivable et de dérivée continue autant de fois que l'on souhaite) sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
Donc F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donc en particulier continue sur $\mathbb{R}$.
(ii) Idem point précédent.
(iii) Pour tout réel x, $F'(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.
Donc pour $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) \geq 0$ et donc F est croissante sur $\mathbb{R}$.
(iv) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 1 - \dfrac{1}{1+e^x} = 1 - 1 = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1 - 0 = 1$.

F est bien la fonction de répartition d'une variable à densité X.

Une densité de X est $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

Correction 5

1. On a trivialement $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} t\ f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}t = 0$.

On doit donc calculer $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} t\ f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{A \to +\infty} \int_{1}^{A} t\ f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{A \to +\infty} \int_{1}^{A} 4t^{-4}\,\mathrm{d}t$.

On suppose $A > 1$.

$\displaystyle\int_{1}^{A} 4t^{-4}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{4}{3}t^{-3}\right]_1^A = -\frac{4}{3}A^{-3} - \left(-\frac{4}{3}1^{-3}\right) = \frac{4}{3} - \frac{4}{3A^3}$.

Puisque $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \frac{4}{3} - \frac{4}{3A^3} = \frac{4}{3}$, on obtient $\displaystyle E(X) = \int_{\mathbb{R}} t\ f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}$.

2. On a trivialement $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t\ g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t = 0$.

On doit donc calculer $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t\ g(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{A \to +\infty} \int_{0}^{A} t\ g(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{A \to +\infty} \int_{0}^{A} 4t^2e^{-2t}\,\mathrm{d}t$.

On suppose $A > 0$.

Par intégration par parties, en posant $u = -2t^2$ et $v' = -2e^{-2t}$, on obtient :

$\displaystyle\int_{0}^{A} 4t^2e^{-2t}\,\mathrm{d}t = \left[-2t^2e^{-2t}\right]_0^A + \int_0^A 4te^{-2t}\,\mathrm{d}t = -2A^2e^{-2A} + \int_0^A 4te^{-2t}\,\mathrm{d}t$.

Dans l'exercice 1, on a obtenu que $\displaystyle\int_0^A 4te^{-2t}\,\mathrm{d}t = -2Ae^{-2A} - e^{-2A} + 1$.

Donc $\displaystyle\int_0^A t\ g(t)\,\mathrm{d}t = -2A^2e^{-2A} - 2Ae^{-2A} - e^{-2A} + 1$.

Et $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} -2A^2e^{-2A} - 2Ae^{-2A} - e^{-2A} + 1 = 1$.

On obtient $\displaystyle E(X) = \int_{\mathbb{R}} t\ g(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

3. On a trivialement $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} t\ h(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}t = 0$.

Puisque $t \mapsto t\ h(t) = \dfrac{4\ln(t)}{t^2}$ est continue sur $[1;+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\ h(t)\,\mathrm{d}t$ ne pose problème qu'en $+\infty$. On doit donc calculer $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{4\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ avec $A > 1$.

Par intégration par parties avec $u = \ln t$ et $v' = \dfrac{4}{t^2}$, on obtient :

$$\int_1^A \frac{4\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{4\ln(t)}{t}\right]_1^A + \int_1^A \frac{4}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{4\ln(A)}{A} - \frac{4}{A} + 4.$$

De plus, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} -\frac{4\ln(A)}{A} - \frac{4}{A} + 4 = 4$.

Donc $E(X) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} t\ f(t)\,\mathrm{d}t = 4$.

Correction 6

On a trivialement $\displaystyle\int_{-\infty}^1 t^2\ f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^1 0\,\mathrm{d}t = 0$.

On doit donc calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A 4t^{-3}\,\mathrm{d}t$.

On suppose $A > 1$.

$$\int_1^A 4t^{-3}\,\mathrm{d}t = \left[-2t^{-2}\right]_1^A = -2A^{-2} - \left(-2\times 1^{-2}\right) = 2 - \frac{2}{A^2}.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} 2 - \frac{2}{A^2} = 2$, on obtient $E(X^2) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 2$.

D'après l'exercice 5, on a $E(X) = \dfrac{4}{3}$. Donc $V(X) = 2 - \dfrac{16}{9} = \dfrac{2}{9}$.

Correction 7

1. (i) Pour tout réel x, on a $e^{-\frac{|x-1|}{3}} > 0$ donc f est à valeurs positives.

   (ii) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues.

   (iii) Puisque $-|t-1| = 1-t$ si $t \geq 1$ et $-|t-1| = t-1$ si $t < 1$, on décompose l'intégrale de la façon suivante :
   $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
   On calcule alors chacun des termes :

   - $\displaystyle\int_{-\infty}^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^1 \frac{1}{6}e^{-\frac{|t-1|}{3}}\,\mathrm{d}t = \lim_{B\to-\infty} \int_B^1 \frac{1}{6}e^{\frac{t-1}{3}}\,\mathrm{d}t$ avec $B < 1$.

   On a $\displaystyle\int_B^1 \frac{1}{6}e^{\frac{t-1}{3}}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}e^{\frac{t-1}{3}}\right]_B^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{\frac{B-1}{3}}$.

   Puisque $\displaystyle\lim_{B\to-\infty} e^{\frac{B-1}{3}} = 0$, on obtient $\displaystyle\int_{-\infty}^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.

   - $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{1}{6}e^{-\frac{|t-1|}{3}}\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{1}{6}e^{\frac{1-t}{3}}\,\mathrm{d}t$ avec $A > 1$.

   On a $\displaystyle\int_1^A \frac{1}{6}e^{\frac{1-t}{3}}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}e^{\frac{1-t}{3}}\right]_1^A = -\frac{1}{2}e^{\frac{1-A}{3}} + \frac{1}{2}$.

Puisque $\lim\limits_{A \to +\infty} e^{\frac{1-A}{3}} = 0$, on obtient $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.

D'où $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

f est une densité de probabilité.

2. Par définition $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

   - Si $x \leq 1$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{6} e^{\frac{t-1}{3}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} e^{\frac{x-1}{3}}$.
   - Si $x > 1$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{\frac{1-x}{3}} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} e^{\frac{1-x}{3}}$.

   Pour résumer, $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\frac{x-1}{3}} & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{\frac{1-x}{3}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

3. $p(0 \leq X \leq 3) = F(3) - F(0) = 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{3}}$.

4. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} t\ f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{1} t\ f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} t\ f(t)\,\mathrm{d}t$.

   On calcule alors chacun des termes :

   - $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} t\ f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{6} t\ e^{-\frac{|t-1|}{3}}\,\mathrm{d}t = \lim_{B \to -\infty} \int_B^1 \frac{1}{6} t\ e^{\frac{t-1}{3}}\,\mathrm{d}t$ avec $B < 1$.

   On fait une intégration par parties avec $u = t$ et $v' = \frac{1}{6} t\ e^{\frac{t-1}{3}}$ et on obtient :

   $$\text{On a } \int_B^1 \frac{1}{6} t\ e^{\frac{t-1}{3}}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2} t\ e^{\frac{t-1}{3}}\right]_B^1 - \int_B^1 \frac{1}{2} e^{\frac{t-1}{3}}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2} t\ e^{\frac{t-1}{3}}\right]_B^1 - \left[\frac{3}{2} e^{\frac{t-1}{3}}\right]_B^1$$
   $$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} B e^{\frac{B-1}{3}} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} e^{\frac{B-1}{3}}.$$

   Puisque $\lim\limits_{B \to -\infty} B e^{\frac{B-1}{3}} = 0$ et $\lim\limits_{B \to -\infty} e^{\frac{B-1}{3}} = 0$, on obtient $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$.

   De façon identique, on obtient $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\ f(t)\,\mathrm{d}t = 2$

   D'où $E(X) = 1$.

5. En intégrant par parties deux fois de suite, on obtient (après de longs calculs) :

   $\displaystyle\int_B^1 t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\left(\frac{1}{2} t^2 - 3t + 9\right) e^{\frac{t-1}{3}}\right]_B^1 = \frac{13}{2}-$ quelque chose qui tend vers 0.

   $\displaystyle\int_1^A t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\left(-\frac{1}{2} t^2 - 3t - 9\right) e^{\frac{1-t}{3}}\right]_1^A = \frac{25}{2}-$ quelque chose qui tend vers 0.

   On en déduit que $E(X^2) = \frac{13}{2} + \frac{25}{2} = 14$ et $V(X) = 14 - 1^2 = 13$.