Séries numériques

F. Wlazinski

Licence d'économie

1 Introduction

Remarque 1.1

Lors de l'étude des suites, nous avons déjà eu l'occasion de nous intéresser à la somme de certains termes comme l'attestent les deux propriétés et l'exemple qui suivent. Dans ce chapitre, nous allons étendre cette notion à d'autres suites.

Propriété 1.2

La somme des $n+1$ premiers termes d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ arithmétique de raison r est :
$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1)u_0 + \dfrac{n(n+1)}{2} r = \dfrac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$.

Propriété 1.3

La somme des $n+1$ premiers termes d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ géométrique de raison q est :

- Si $q \neq 1$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \sum_{k=0}^{n} q^k = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
- Si $q = 1$, $S_n = (n+1)u_0$ (c'est aussi une suite arithmétique de raison 0).

Exemple 1.4

2 Définitions et premières propriétés

Définition 2.1

Soit u une suite réelle ou complexe. On appelle *série de terme général* u_n, et on note $\sum u_n$, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Le terme S_n est appelé la *somme partielle d'indice* n.

Définition 2.2

On dit que la *série* $\sum u_n$ *converge* si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. La limite de cette suite est alors appelée *somme de la série* et on la note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ou $\sum_{n\geq 0} u_n$.
Si la série ne converge pas, on dit qu'elle *diverge*.

Remarque 2.3

Exemples 2.4

Définition 2.5

Si la série $\sum u_n$ converge, on appelle *reste d'indice* n le réel $R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Propriété 2.6

Si $\sum u_n$ est une série convergente, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Remarques 2.7

Propriété 2.8

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries.

Pour tout réel $\lambda \neq 0$, les séries $\sum \lambda u_n$ et $\sum u_n$ sont simultanément convergentes ou divergentes. De plus, si les séries convergent, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes alors la série $\sum (u_n + v_n)$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Remarque 2.9

Corollaire 2.10

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries **convergentes** et soient α et β deux réels.

La série $\sum (\alpha u_n + \beta v_n)$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \beta \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Propriété 2.11

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. La suite u est convergente si et seulement si la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge. En cas de convergence, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \lim_{n\to+\infty} (u_n) - u_0$.

Démonstration

□

Définition 2.12

On dit que la série $\sum u_n$ est *absolument convergente* si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Propriété 2.13

Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente.

Remarque 2.14

3 Séries de références

Propriété 3.1

Soit $q \in \mathbb{R}$. La série $\sum q^n$ s'appelle la *série géométrique de raison q*. Cette série est convergente si et seulement si $|q| < 1$ et on a alors : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Démonstration

$\square$

Corollaire 3.2

La série $\sum nq^{n-1}$ s'appelle *la série dérivée première de la série géométrique de raison q*. Cette série converge si et seulement si $|q| < 1$. Et on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} \left(= \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} \right) = \frac{1}{(1-q)^2}$.

Démonstration

$\square$

Remarque 3.3

Corollaire 3.4

Pour tout réel $|x| < 1$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Démonstration

$\square$

Corollaire 3.5

La série $\sum n(n-1)q^{n-2}$ s'appelle *la série dérivée seconde de la série géométrique de raison q*. Cette série converge si et seulement si $|q| < 1$ et on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$.

Démonstration

$\square$

Remarque 3.6

Corollaire 3.7

Pour tout réel $|x| < 1$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$.

Démonstration

$\square$

Exemples 3.8

Théorème 3.9

Soit α un réel.
La série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. Ces séries sont appelées les *séries de Riemann.*

Propriété 3.10

La série $\sum \dfrac{1}{n}$ est appelée *série harmonique.* La série harmonique est une série divergente.

Exemple 3.11

Théorème 3.12

Pour tout réel x, la série $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge et on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$
Cette série est appelée *série exponentielle.*

Exemple 3.13