

Suites récurrentes linéaires

F. Wlazinski

Licence d'économie

1 Suites récurrentes linéaires d'ordre 1

Définition 1.1

Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout entier n , une équation du type (1) : $u_{n+1} = a \times u_n + b_n$, où a est un réel et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite, sont appelées *suites récurrentes linéaires d'ordre 1*.

Principe

Les solutions de l'équation (1) ont pour terme général : $u_n = K \times a^n + s_n$ où :

- (i) $K \in \mathbb{R}$ se détermine grâce aux conditions initiales (généralement la valeur de u_0 ou de u_1)
- (ii) $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une solution particulière de l'équation (1).

Propriété 1.2

Dans des situations connues, on cherche une solution particulière s_n de l'équation (1) en respectant les règles suivantes :

1. Si $b_n = c^n \times P(n)$ avec P un polynôme alors on cherche une solution particulière de la forme :

- (i) $s_n = c^n \times Q(n)$ avec $\deg(Q) = \deg(P)$ si $c \neq a$
- (ii) $s_n = n \times c^n \times Q(n)$ avec $\deg(Q) = \deg(P)$ si $c = a$

où Q est un polynôme à déterminer.

2. *Cas particulier* : si $b_n = \ell \times c^n$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ (ℓ est un polynôme de degré 0) alors on cherche une solution particulière de la forme :

- (i) $s_n = kc^n$ si $c \neq a$
- (ii) $s_n = knc^n$ si $c = a$

où $k \in \mathbb{R}$ est à déterminer.

Exemple 1.3

Remarque 1.4

Au cas où $b_n = c_1^n \times P_1(n) + c_2^n \times P_2(n)$, on applique les règles précédentes à chacun des deux termes de b_n . Puis on additionne les solutions particulières respectives. Cela s'applique aussi à des sommes de $p(\geq 3)$ termes.

2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définitions 2.1

Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout entier n , une équation du type (2a) : $u_{n+2} + \alpha.u_{n+1} + \beta.u_n = 0$ où α et β sont des réels sont appelées *suites récurrentes linéaires d'ordre 2 sans second membre* ou *homogènes*.

On appelle *équation caractéristique* de (2a), l'équation (2') : $r^2 + \alpha r + \beta = 0$.

Propriété 2.2

Avec les notations de la définition 2.1, suivant les valeurs du discriminant de (2'), on peut exprimer u_n en fonction de n .

- (i) Si $\Delta > 0$ et si r_1 et r_2 sont les deux solutions réelles de (2') alors les solutions de l'équation (2a) sont de terme général : $u_n = k \times r_1^n + \ell \times r_2^n$ où $k, \ell \in \mathbb{R}$.
- (ii) Si $\Delta = 0$ et si r_0 est la solution double de (2') alors les solutions de l'équation (2a) sont de terme général : $u_n = (kn + \ell) \times r_0^n$ où $k, \ell \in \mathbb{R}$.
- (iii) Si $\Delta < 0$ et si $r_1 = \rho e^{-i\theta}$ et $r_2 = \rho e^{i\theta}$ sont les deux solutions complexes de (2') alors les solutions de l'équation (2a) sont de terme général : $u_n = \rho^n \times (k \cos(\theta n) + \ell \sin(\theta n))$ où $k, \ell \in \mathbb{R}$.

Exemple 2.3

Remarque 2.4

Les réels k et ℓ peuvent se déterminer grâce aux conditions initiales (souvent les valeurs de u_0 et de u_1).

Définition 2.5

Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout entier n , une équation du type (2b) : $u_{n+2} + \alpha.u_{n+1} + \beta.u_n = b_n$, où α et β sont des réels et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite, sont appelées *suites récurrentes linéaires d'ordre 2 avec second membre* ou *non homogènes* ou encore *suites récurrentes affines d'ordre 2*.

Propriété 2.6

Les solutions de l'équation (2b) sont de terme général : $u_n = v_n + s_n$ où $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la solution générale de (2a) et $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une solution particulière de (2b).

Si $b_n = c^n \times P(n)$ avec P un polynôme alors on cherche une solution particulière de la forme :

- (i) $s_n = c^n \times Q(n)$ avec $\deg(Q) = \deg(P)$ si c n'est pas une racine de (2')
- (ii) $s_n = nc^n \times Q(n)$ avec $\deg(Q) = \deg(P)$ si c est une racine simple de (2')
- (iii) $s_n = n^2 c^n \times Q(n)$ avec $\deg(Q) = \deg(P)$ si c est une racine double de (2')

Exemple 2.7

Remarque 2.8

Au cas où $b_n = c_1^n \times P_1(n) + c_2^n \times P_2(n)$, on applique les règles précédentes à chacun des deux termes de b_n . Puis on additionne les solutions particulières respectives. Cela s'applique aussi à des sommes de $p(\geq 3)$ termes.

Exemple 2.9