Variables aléatoires (Partie 2)

Variables aléatoires discrètes usuelles

F. Wlazinski

Licence d'économie

1 Loi uniforme

Définition 1.1

Une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini à $n(\geq 1)$ éléments $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ est dite *uniforme* si et seulement si$p(X{=}x_i) = \dfrac{1}{n}$ pour tout i de $[\![1; n]\!]$.

Remarque 1.2

Exemple 1.3

Dans un jeu, on lance un dé non pipé à 6 faces dont 2 sont bleues, 2 sont rouges et 2 sont blanches. Si une face bleue sort, le joueur gagne 4€. Si une face rouge sort, le joueur perd 3€. Et si une face blanche sort, le joueur perd 2€. On note X la v.a.r. égale au gain (ou la perte) du joueur après un lancer.

Propriété 1.4

Avec les notations de la définition 1.1, on a :
$E(X) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$. et $V(X) = \dfrac{1}{n^2}\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{n} n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]$.

Exemple 1.5

Propriété 1.6

Soit X une v.a.r. uniforme définie sur $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p\big)$ telle que $X(\Omega) = \{1, \ldots, n\} = [\![1; n]\!]$. Alors

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k\, p(X{=}k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2}.$$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2\, p(X{=}k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

2 Epreuve de Bernoulli et schéma de Bernoulli

Définition 2.1

On appelle *épreuve de Bernoulli* toute épreuve qui ne possède que deux issues possibles appelées *succès* (ou *réussite*) et *échec*.

Exemples 2.2

Remarques 2.3

Propriété 2.4

Soit X une v.a.r. qui suit une loi de Bernoulli et soit $p = p(X{=}1)$. Alors :

(i) $E(X) = p$

(ii) $V(X) = p(1-p) = pq$

Exemple 2.5

Un candidat doit répondre à un Q.C.M. de 5 questions avec 2 choix à chacune des questions dont un seul est correct. Le candidat coche les réponses au hasard. Il est admis si les 5 réponses sont correctes. Soit X la v.a.r. qui prend la valeur 1 si le candidat est admis, et la valeur 0 si le candidat est refusé.

Définition 2.6

On appelle *schéma de Bernoulli* l'univers probabilisé de $n(\geq 1)$ répétitions indépendantes d'une même épreuve de Bernoulli.

Exemples 2.7

Remarque 2.8

3 Loi binomiale

Principe

On se place dans la situation d'un schéma de Bernoulli à n épreuves et de paramètre p.
On s'intéresse à la variable aléatoire X associée au nombre de succès dans ce schéma.

Remarque 3.1

Définition 3.2

On dit qu'une v.a.r discrète X suit une loi binomiale de paramètres n et p et on note $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ si $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$ et $p(X{=}k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = C_n^k p^k(1-p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Exemple 3.3

On jette 5 fois une pièce truquée telle que la probabilité d'avoir face est $\frac{1}{3}$.
Soit X la v.a.r. égale au nombre de fois que l'on a obtenu face.

Propriété 3.4

Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p) = npq$.

Exemple 3.5

4 Loi hypergéométrique

Principe

Dans une situation d'équiprobabilité, si on choisit n éléments simultanément dans un ensemble contenant N éléments dont $P(\leq N)$ sont des éléments particuliers.
On s'intéresse à la v.a.r. correspondant au nombre d'éléments particuliers dans la sélection.

Remarques 4.1

Définition 4.2

Soit N et n des entiers tels que $n \leq N$ et $p \in [0;1]$ tel que Np soit un nombre entier.
On pose $a = \max\{0; n-(1-p)N\}$ et $b = \min\{n; pN\}$.
On dit qu'une v.a.r. X suit la loi hypergéométrique de paramètres N, n, p et on note $X \sim \mathscr{H}(N,n,p)$ si et seulement si $X(\Omega) = [\![a;b]\!]$ et $\forall k \in X(\Omega), p(X{=}k) = \dfrac{C_{Np}^k C_{N-Np}^{n-k}}{C_N^n} = \dfrac{\binom{Np}{k}\binom{N-Np}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

Exemples 4.3

- Une urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires.
  On effectue un tirage, de façon simultanée, de 4 boules.
  Soit X est la v.a.r. égale au nombre de boules blanches obtenues.
- Dans une assemblée de 455 personnes, il y a 60% de femmes.
  On choisit au hasard 5 personnes.
  Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de femmes choisies.

Propriété 4.4

Si X suit la loi hypergéométrique $\mathscr{H}(N,n,p)$ alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)\dfrac{N-n}{N-1} = npq\dfrac{N-n}{N-1}$.

Exemple 4.5

5 Loi géométrique

Principe

On considère un schéma de Bernoulli où l'on répète l'expérience jusqu'à ce que le succès soit réalisé pour la première fois.
On s'interesse à la v.a.r. discrète infinie X qui correspond au nombre d'épreuves effectuées avant succès.

Définition 5.1

Soit $p \in]0;1[$. On dit qu'une v.a.r. X suit une *loi géométrique* de paramètre p et on note $X \sim \mathscr{G}(p)$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $p(X{=}k) = (1-p)^{k-1}p = q^{k-1}p$.

Exemple 5.2

Une urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires. On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule jusqu'à ce que l'on obtienne une boule blanche.
Soit X la v.a.r. égale au nombre de tirages effectués.

Propriété 5.3

Soit X une v.a.r. qui suit la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$. Alors : $E(X) = \dfrac{1}{p}$ et $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

Exemple 5.4

6 Loi de Poisson

Principe

La loi de Poisson dite des événements rares est une loi de probabilité qui a pour principe initial de décrire l'évolution du nombre d'événements se produisant dans un laps de temps donné sachant connue la fréquence moyenne (ou théorique) d'apparition de ces événements.

Définition 6.1

Soit un réel $\lambda > 0$. On dit qu'une v.a.r. (discrète infinie) X suit une *loi de Poisson* et on note $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et, $\forall k \in \mathbb{N}$, $p(X{=}k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

Propriété 6.2

Soit X une v.a.r. qui suit la loi $\mathscr{P}(\lambda)$. Alors on a $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$.

7 Approximation

Principe

Dans la pratique, il est parfois compliqué de calculer exactement la valeur d'un résultat faisant intervenir une loi binomiale ou une loi hypergéométrique. Et, bien souvent, on peut se contenter d'une approximation du résultat.
Dans certains cas bien précis (mais qui varient dans la littérature), cette approximation passe par la loi de Poisson dont on connait la table de la fonction de répartition (qui sera donnée en Td et en examen).

Propriété 7.1

Une v.a.r. $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ peut être approchée par une loi de poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda = np$ si $n > 30$ et $np < 5$ ou si $n > 50$ et $p < 0,1$.

Remarque 7.2

On pourra approximer une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ par une loi de Poisson lorsque n sera grand, p sera petit mais np devra être compris entre $0,1$ et 9.

Exemple 7.3

Une entreprise achète 100 voitures identiques dont la probabilité d'au moins une panne la première année est de $p = \dfrac{1}{20}$. On cherche à déterminer la probabilité qu'il y ait 5 voitures ou moins qui ait une panne la première année.
Soit X la v.a.r. associée au nombre de véhicules ayant eu au moins une panne la première année.

Propriété 7.4

Une v.a.r. $X \sim \mathscr{H}(N,n,p)$ peut être approchée par une loi $\mathscr{B}(n,p)$ lorsque l'échantillon n est 10 fois plus petit que la population N.

Remarque 7.5

L'idée est que, dans un tirage successif d'éléments dans un ensemble, l'action ou non de remettre dans l'ensemble chaque élément pris a peu d'importance si le cardinal de l'ensemble est grand.

Exemple 7.6

Remarque 7.7

Par transitivité, une loi hypergéométrique peut, dans certaines situations, être approchée par une loi de Poisson.

Exemple 7.8

Une entreprise fabrique des calculatrices dont le taux de machines défectueuses est de $0,3\%$. Un hypermarché achète 1000 de ces calculatrices. Quelle est la probabilité qu'il y ait au plus quatre calculatrices défectueuses dans ce lot acheté?
Soit X la variable correspondant au nombre de calculatrices défectueuses.

Exemple 7.9

A cause d'une défaillance de la chaine de production d'une fabrique laitière, il y a 20 soit $0,2\%$ des 10000 fromages qui contiennent de la listeria. Un hypermarché a acheté 1000 de ces fromages. Quelle est la probabilité qu'il y ait au plus cinq fromages contaminés dans ce lot?
Soit X la v.a.r égale au nombre de fromages contaminés parmi les 1000.